Colloque de la Société Mathématique de Tunisie, 2000 : –.

Différents Aspects Stochastiques et Géométriques de la Formule de Clark

Nicolas Privault

La formule de Clark est présentée comme un analogue du “fundamental theorem of calculus” dans le cadre général des martingales normales, et pour le mouvement brownien riemannien. Des applications de cette formule aux inégalités de Sobolev logarithmiques et aux mathématiques financières sont mentionnées.

1 Introduction

Il est bien connu que la formule de Clark s'interprête comme un analogue stochastique de la formule de Taylor classique, voir par exemple [12], Ch. VII. Nous nous intéressons ici à l'écriture du classique “fundamental theorem of calculus” en termes de séries entières :

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x^n \\ &= \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} n\alpha_n \int_0^x y^{n-1} dy \\ &= f(0) + \int_0^x f'(y) dy, \end{aligned}$$

avec l'identité $x^n = n \int_0^x y^{n-1} dy$. Si l'on remplaçe x^n par le polynôme d'Hermite $H_n(x,t)$ de paramètre $t > 0$ on a toujours $\frac{\partial}{\partial x} H_n(x,t) = nH_{n-1}(x,t)$ mais $H_{2n}(0,t) \neq 0$, et le raisonnement ci-dessus n'est plus valable. Peut-on écrire $H_n(x,t)$ comme une intégrale de $nH_{n-1}(x,t)$? Une réponse positive est donnée dans une certaine mesure par le *calcul stochastique* :

$$H_n(B_t,t) = n\int_0^t H_{n-1}(B_s,s)dB_s, \tag{1}$$

où dB_s est la différentielle d'Itô associée au mouvement Brownien standard $(B_s)_{s\in\mathbb{R}_+}$. Le développement de f dépendant d'un paramètre t en série de polynômes d'Hermite peut donc s'écrire

$$\begin{aligned} f(B_t,t) &= \sum_{n=0}^{\infty}\beta_n H_n(B_t,t) \\ &= \beta_0 + \sum_{n=1}^{\infty} n\beta_n \int_0^t H_{n-1}(B_s,s)dB_s \\ &= E[f(B_t,t)] + \int_0^t E\left[\frac{\partial}{\partial x} f(B_s,s)\mid \mathcal{F}_s\right] dB_s, \end{aligned} \tag{2}$$

la derniere égalité provient du fait que $H_{n-1}(B_s,s)$ n'est autre que l'espérance conditionnelle $E[H_{n-1}(B_t,t)\mid\mathcal{F}_s]$, $s<t$, par la propriété de martingale de $(B_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$. L'intégrale stochastique multiple

$$I_n(f_n) = n!\int_0^\infty\int_0^{s_n}\cdots\int_0^{s_2} f_n(s_1,\ldots,s_n)dB_{s_1}\cdots dB_{s_n}$$

est définie pour toute fonction $f_n\in L^2(\mathbb{R}_+^n)$ symétrique par la formule d'isométrie

$$\langle I_n(f_n), I_m(g_m)\rangle_{L^2(\Omega)} = 1_{\{n=m\}} n!\langle f_n, g_m\rangle_{L^2(\mathbb{R}_+^n)}.$$

Le raisonnement ci-dessus s'étend alors à certaines fonctionnelles du mouvement brownien $(B_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ admettant un développement en série d'intégrales stochastiques (en particulier les fonctionnelles de carré intégrable) :

$$\begin{aligned} F &= E[F] + \sum_{n=1}^{\infty} I_n(f_n) \\ &= E[F] + \sum_{n=1}^{\infty} n\int_0^\infty I_{n-1}(f_n(*,t)1_{\{*\le t\}})dB_t \\ &= E[F] + \int_0^\infty E[D_tF\mid\mathcal{F}_t]dB_t, \end{aligned} \tag{3}$$

où le gradient stochastique D_t est l'opérateur linéaire défini par

$$D_tI_n(f_n) = nI_{n-1}(f_n(*,t)),$$

avec

$$I_{n-1}(f_n(*,t)1_{\{*\le t\}}) = E[I_{n-1}(f_n(*,t))\mid\mathcal{F}_t],\quad t\in\mathbb{R}_+.$$

Étant donné la relation

$$H_n(B_t, t) = n! \int_0^t \int_0^{s_n} \cdots \int_0^{s_2} dB_{s_1} \cdots dB_{s_n}, \tag{4}$$

le raisonnement (3) apparaît comme une généralisation de (2). De plus le polynôme à d variables et de degré n

$$P_n(B_{t_0}, \dots B_{t_d}) = H_{n_1}(B_{t_1} - B_{t_0}, t_1 - t_0) \cdots H_{n_d}(B_{t_d} - B_{t_{d-1}}, t_d - t_{d-1}),$$

$0 \leq t_0 < \cdots < t_d$, avec $n = n_1 + \cdots + n_d$, s'écrit comme l'intégrale stochastique multiple

$$P_n(B_{t_0}, \dots B_{t_d}) = n! \int_0^\infty \int_0^{s_n} \cdots \int_0^{s_2} 1_{[t_0,t_1]}^{\circ n_1} \circ \cdots \circ 1_{[t_{d-1},t_d]}^{\circ n_d} dB_{s_1} \cdots dB_{s_n},$$

et on a

$$D_t P_n(B_{t_0}, \dots B_{t_d}) = \sum_{i=0}^{i=d} 1_{[0,t_i]}(t) \partial_i P_n(B_{t_0}, \dots B_{t_d}),$$

donc (3) est donc une généralisation de (2) en dimension quelconque. Un autre intérêt de (3) est de ne pas faire apparaître directement de polynômes. Le mouvement brownien $(B_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ appartient à la famille des martingales $(M_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ dites *normales*, c'est à dire satisfaisant $d\langle M_t, M_t \rangle = dt$. Par rapport à une telle martingale, l'intégrale stochastique multiple

$$I_n(f_n) = n! \int_0^\infty \int_0^{t_n} \cdots \int_0^{t_2} f_n(t_1, \dots, t_n) dM_{t_1} \cdots dM_{t_n}$$

est toujours définie par la formule d'isométrie

$$\langle I_n(f_n), I_m(g_m) \rangle_{L^2(\Omega)} = 1_{\{n=m\}} n! \langle f_n, g_m \rangle_{L^2(\mathbb{R}_+^n)}.$$

Si $(M_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ dans L^4 a la propriété de représentation prévisible, alors l'équation de structure

$$d[M_t, M_t] = dt + \phi_{t^-} dM_t, \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{5}$$

est vérifiée, avec $(\phi_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ est un processus adapté et de carré intégrable. Si $(\phi_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ est déterministe alors $(M_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ est la combinaison d'un mouvement brownien et d'un processus de Poisson. Si $\phi_t = \beta M_t$, $\beta \in [-2, 0[$, alors (5) a une solution unique appelée martingale d'Azéma, cf. [8]. A l'exception du processus de Poisson compensé, et du mouvement Brownien les intégrales stochastiques multiples par rapport aux martingales normales ne s'expriment pas à l'aide de polynômes comme dans (4), cf. [17], cependant la même preuve s'applique pour la formule de Clark :

$$\begin{aligned}
F &= E[F] + \sum_{n=1}^{\infty} I_n(f_n) \\
&= E[F] + \sum_{n=1}^{\infty} n \int_0^{\infty} I_{n-1}(f_n(*,t)1_{\{*\leq t\}})dM_t \\
&= E[F] + \int_0^{\infty} E[D_tF \mid \mathcal{F}_t]dM_t.
\end{aligned}$$

2 Inégalités de Sobolev logarithmiques

Comme première application nous allons montrer que la preuve des inégalités de Sobolev logarithmiques modifiées sur l'espace de Poisson de [1], [2], [4], [5] s'étend aux martingales normales. L'entropie d'une variable aléatoire F est définie par

$$\mathrm{Ent}\,[F] = E[F \log F] - E[F] \log E[F],$$

pour F suffisamment intégrable.

Proposition 1 ([16])
Soit $F \in \mathrm{Dom}(D)$ bornée avec $F > \eta$ pour un $\eta > 0$. On a

$$\mathrm{Ent}\,[F] \leq \frac{1}{2} E\left[\frac{1}{F}\int_0^T (2-i_t)(D_tF)^2 dt\right], \tag{6}$$

avec $i_t = 1_{\{\phi_t = 0\}}$, $t \in \mathbb{R}_+$.

Preuve. On pose

$$X_t = E[F \mid \mathcal{F}_t] = X_0 + \int_0^t H_s dM_s, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

avec $H_s = E[D_sF \mid \mathcal{F}_{s^-}]$, $s \in \mathbb{R}_+$. La formule de changement de variable, Prop. 2 de [8], montre que

$$\begin{aligned}
&F \log F - E[F] \log E[F] \\
&= \int_0^T \frac{(X_{t^-} + \phi_t H_t)\log(X_{t^-} + \phi_t H_t) - X_{t^-}\log X_{t^-}}{\phi_t} dM_t \\
&\quad + \int_0^T i_t H_t (1 + \log(X_{t^-}))dM_t \\
&\quad + \int_0^T \frac{(X_{t^-} + \phi_t H_t)\log(X_{t^-} + \phi_t H_t) - X_{t^-}\log X_{t^-} - \phi_t H_t(1 + \log X_{t^-})}{\phi_t^2} dt \\
&\quad + \frac{1}{2}\int_0^T i_t \frac{H_t^2}{X_t} dt,
\end{aligned}$$

avec la convention $0/0 = 0$. Appliquant l'inégalité de Jensen à la fonction convexe

$$\Psi(u,v) = (u+v)\log(u+v) - u\log u - (1+\log u)v, \quad u, u+v > 0,$$

et l'inégalité $\Psi(u,v) \leq |v|^2/u$, $u > 0$, $u+v > 0$, comme dans [19] et [20], puis l'inégalité de Schwarz, on obtient :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ent}\,[F] &= E\left[\int_0^T \frac{1}{\phi_t^2}\Psi(X_{t^-}, \phi_t H_t)dt\right] + \frac{1}{2}E\left[\int_0^T i_t \frac{H_t^2}{X_t}dt\right] \\
&\leq E\left[\int_0^T E\left[\frac{1}{\phi_t^2}\Psi(F, \phi_t D_t F) \mid \mathcal{F}_t\right] dt\right] + \frac{1}{2F}E\left[\int_0^T i_t (D_t F)^2 dt\right] \\
&= E\left[\int_0^T \frac{1}{\phi_t^2}\Psi(F, \phi_t D_t F)dt + \frac{1}{2F}\int_0^T i_t(D_tF)^2 dt\right] \\
&\leq \frac{1}{2}E\left[\frac{1}{F}\int_0^T (2-i_t)(D_tF)^2 dt\right].
\end{aligned}$$

□

3 La formule de Clark en mathématiques financières

Il existe de nombreux livres sur la finance stochastique, on peut consulter [18] pour des références récentes. Soient $r : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ et $\sigma : \mathbb{R}_+ \longrightarrow]0,\infty[$ des fonctions déterministes bornées. Soit $t > 0$ et $(S_{t,s}^x)_{s\in[t,\infty[}$ le processus de prix défini par

$$\frac{dS_{t,s}^x}{S_{t,s}^x} = r_s ds + \sigma_s dM_s, \quad s \in [t,\infty[, \quad S_{t,t}^x = x \in]0,\infty[,$$

où $(M_s)_{s\in\mathbb{R}_+}$ est une martingale normale et soit $(A_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ l'actif sans risqe défini par

$$\frac{dA_t}{A_t} = r_t dt, \quad A_0 = 1, \quad t \in \mathbb{R}_+. \tag{7}$$

On pose $S_t = S_{0,t}^1$, $t \in \mathbb{R}_+$. Soient η_t et ζ_t les nombres d'unités investies au temps t, respectivement dans les actifs $(S_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ et $(A_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$. La valeur du portefeuille V_t au temps t est donnée par

$$V_t = \zeta_t A_t + \eta_t S_t, \quad t \in \mathbb{R}_+. \tag{8}$$

On suppose que le portefeuille est auto-finançant : $A_t d\zeta_t + S_t d\eta_t = 0$, donc

$$dV_t = r_t V_t dt + \sigma_t \eta_t S_t dM_t, \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{9}$$

et

$$V_T = V_0 \exp\left(\int_0^T r_t dt\right) + \int_0^T \sigma_t \eta_t S_t \exp\left(\int_t^T r_s ds\right) dM_t, \quad T \in \mathbb{R}_+. \quad (10)$$

Supposons que l'on doive trouver une stratégie de couverture $(\zeta_t, \eta_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ conduisant à une valeur donnée $V_T = F = (S_T - K)^+$. Par comparaison de (10) avec la formule de Clark

$$F = E[F] + \int_0^T E[D_t F \mid \mathcal{F}_t] dM_t,$$

on obtient

$$\begin{aligned} V_0 &= E[(S_T - K)^+] \exp\left(-\int_0^T r_s ds\right), \\ \eta_t &= \sigma_t^{-1} S_t^{-1} E[D_t (S_T - K)^+ \mid \mathcal{F}_t] \exp\left(-\int_t^T r_s ds\right), \quad t \in \mathbb{R}_+, \end{aligned}$$

ce qui permet de calculer la stratégie de couverture $(\eta_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$. On peut ainsi déterminer $(V_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ à partir de (9), puis en déduire $(\zeta_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$. Les propositions suivantes présentent des formules plus explicites pour $(\eta_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$. Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des polynômes en $M_{t_1}, \ldots, M_{t_n}$, $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}_+$, $n \geq 1$. On suppose que $(M_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est solution de (5) avec $(\phi_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ déterministe, on se place donc dans le modèle de [11].

Proposition 2 ([7])
On a

$$\begin{aligned} E[D_t (S_T - K)^+ \mid \mathcal{F}_t] = E\Big[& i_t \sigma_t S_{t,T}^x 1_{[K,\infty[}(S_{t,T}^x) \\ & + \frac{1 - i_t}{\phi_t} (\sigma_t \phi_t S_{t,T}^x - (K - S_{t,T}^x)^+) 1_{[\frac{K}{1+\sigma_t},\infty[}(S_{t,T}^x) \Big]_{x=S_t}. \end{aligned}$$

Preuve. On utilise la formule

$$D_t F(\omega) = D_t^B F(\omega) + \frac{1 - i_t}{\phi_t} (F(\omega + \phi_t 1_{[t,\infty[}) - F(\omega)), \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad (11)$$

$F \in \mathcal{S}$, où D_t^B est le gradient stochastique défini par

$$\langle D^B F, u \rangle_{L^2_\alpha(\mathbb{R}_+)} = \frac{d}{d\varepsilon} F\left(\omega(\cdot) + \varepsilon \int_0^\cdot i_s u_s ds\right)_{|\varepsilon=0},$$

puis on applique la propriété de Markov de $(t, S_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$. □

Pour $\beta \in [-2, 0[$, soit $(M_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ l'unique solution de l'équation de structure (5), ce qui correspond au modèle de marché de [6].

Proposition 3 ([7])
On a

$$\begin{aligned}
&E\left[D_t(S_T-K)^+ \mid \mathcal{F}_t\right] \\
&= \frac{1}{\beta M_t} E\Bigg[(y+M_T-M_t)\sigma_t\beta S^x_{t,T} 1_{[\frac{K}{1+\sigma_t\beta(y+M_T-M_t)},\infty[}(S^x_{t,T}) \\
&\qquad +(S^x_{t,T}-K)1_{[\frac{K}{1+\sigma_t\beta(y+M_T-M_t)},K]}(S^x_{t,T})\Bigg]_{x=S_t}^{y=M_t}.
\end{aligned}$$

Preuve. Soient les vecteurs $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+} = ([S_t, M_t])_{t\in\mathbb{R}_+}$, $(K_t)_{t\in\mathbb{R}_+} = ([r_tS_t, 0])_{t\in\mathbb{R}_+}$, $(H_t)_{t\in\mathbb{R}_+} = ([\sigma_tS_t, 1])_{t\in\mathbb{R}_+}$, avec $X_0 = [1, 0]$. Par la formule de changement de variables (Prop. 2 de [8]), on a pour $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$:

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t L_sf(X_s)dM_s + \int_0^t (U_s + K_s\nabla)f(X_s)ds,$$

avec

$$\begin{aligned}
L_sf(X_s) &= \frac{f(X_s+\beta M_sH_s) - f(X_s)}{\beta M_s}, \\
U_sf(X_s) &= \frac{f(X_s+\beta M_sH_s) - f(X_s) - \beta H_s\nabla f(X_s)}{\beta^2M_s^2}.
\end{aligned}$$

On applique cette formule à la martingale $t \mapsto P_{t,T}f(X_t) = E[f(X_T) \mid \mathcal{F}_t]$ dont le terme à variation finie est nul, pour obtenir :

$$P_{t,T}f(X_t) = P_{0,T}f(X_0) + \int_0^t (L_s(P_{s,T}f))(X_s)dM_s, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

avec $P_{0,T}f(X_0) = E[f(X_T)]$. Donc

$$\begin{aligned}
&E[D_tf(X_T) \mid \mathcal{F}_t] = (L_t(P_{t,T}f))(X_t) \\
&= \frac{1}{\beta M_t}((P_{t,T}f)(X_t+\beta M_tH_t) - (P_{t,T}f)(X_t)) \\
&= \frac{1}{\beta M_t}((P_{t,T}f)([(1+\beta M_t\sigma_t)S_t, (1+\beta)M_t]) - (P_{t,T}f)([S_t, M_t])) \\
&= \frac{1}{\beta M_t}E\left[f((1+\sigma_t\beta(y+M_T-M_t))S_T, (1+\beta(y+M_T-M_t))S_T\right]_{x=S_t}^{y=M_t} \\
&\quad -\frac{1}{\beta M_t}E\left[f(S_T, M_T)\right]_{x=S_t}^{y=M_t}.
\end{aligned}$$

La dernière ligne provient de la propriété de Markov de $(t, S_t, M_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$. □

4 Formule de Clark et mouvement brownien riemannien

La formule de Clark pour le mouvement brownien sur les variétés riemanniennes peut être écrite de deux façons, en utilisant soit le gradient D sur l'espace de Fock relatif au brownien "plat", soit le gradient amorti $\tilde{D}$ associé au brownien riemannien, car ces gradients diffèrent d'un processus dont la projection adaptée est nulle. Nous montrons ici que ce processus admet une expression explicite utilisant le gradient D et l'intégrale de Skorohod δ (adjoint de D) associés au brownien "plat" d-dimensionnel $(B_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$. Soit M une variété riemannienne de dimension d, dont le fibré des repères orthonormés est noté $O(M)$. Le transport parallèle de Levi-Civita définit d champs de vecteurs horizontaux canoniques $A_1, \ldots, A_d$ on $O(M)$, et l'équation différentielle de Stratonovich

$$\begin{cases} dr(t) = \sum_{i=1}^{i=d} A_i(r(t)) \circ dB^i(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \\ r(0) = (m_0, r_0) \in O(M), \end{cases}$$

définit un processus $(r(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ à valeurs dans $O(M)$, cf. [10] et les références citées. Soit $\pi : O(M) \longrightarrow M$ la projection canonique, soit $\gamma(t) = \pi(r(t))$, $t \in \mathbb{R}_+$, le mouvement brownien sur M, et soit le transport parallèle le long de $(\gamma(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ défini par

$$\mathbf{t}_{t\leftarrow 0} = r(t)r_0^{-1} : T_{m_0}M \longrightarrow T_{\gamma(t)}M, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Soit $\mathbb{P}(M) = \mathcal{C}_{m_0}(\mathbb{R}_+; M)$ l'espace des fonctions continues sur M partant de m_0, soit

$$\begin{array}{rcl} I & : & \mathcal{C}_0(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^d) \longrightarrow \mathcal{C}_{m_0}(\mathbb{R}_+; M) \\ & & (\omega(t))_{t\in\mathbb{R}_+} \mapsto I(\omega) = (\gamma(t))_{t\in\mathbb{R}_+} \end{array}$$

l'application d'Itô, et soit ν la mesure image par I de la mesure de Wiener sur $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^d)$. Soit $\mathcal{S}(\mathbb{P}(M))$, resp. $\mathcal{U}(\mathbb{P}(M) \times \mathbb{R}_+; \mathbb{R}^d)$ l'ensemble des fonctionnelles de la forme $F = f(\gamma(t_1), \ldots, \gamma(t_n))$, $f \in \mathcal{C}_b^\infty(M^n)$, $0 \le t_1 \le \cdots \le t_n \le 1$, $n \ge 1$, resp. de la forme

$$\sum_{k=1}^{k=n} F_k \int_0^\cdot u_k(s) ds,$$

$F_1, \ldots, F_n \in \mathcal{S}(\mathbb{P}(M))$, $u_1, \ldots, u_n \in L^2(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^d)$, $n \ge 1$. Ces espaces sont respectivement denses dans $L^2(\mathbb{P}(M), d\nu)$ et dans $L^2(\mathbb{P}(M) \times \mathbb{R}_+, d\nu \otimes dt; \mathbb{R}^d)$.

Définition 1 ([9])
Soit $\hat{D} : L^2(\mathbb{P}(M)) \longrightarrow L^2(\mathbb{P}(M) \times \mathbb{R}_+; T_{m_0})$ *le gradient intrinsèque défini par*

$$\hat{D}_t F = \sum_{i=1}^{i=n} \mathbf{t}_{0\leftarrow t_i} \nabla_i^M f(\gamma(t_1), \ldots, \gamma(t_n)) 1_{[0,t_i]}(t), \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

pour $F = f(\gamma(t_1), \ldots, \gamma(t_n)) \in \mathcal{S}(\mathbb{P}(M))$.

Soit Ω_r le tenseur de courbure sur M et soit $\mathrm{ric}_r : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ le tenseur de Ricci en $r \in O(M)$, et soit $(\hat{z}(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ le processus défini par

$$\begin{cases} \dot{\hat{z}}(t) = \dot{z}(t) + \frac{1}{2}\mathrm{ric}_{r(t)} z(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \\ \\ \hat{z}(0) = 0, \end{cases} \tag{12}$$

cf. [3]. Soit $q(t,z) : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ défini par

$$q(t,z) = -\int_0^t \Omega_{r(s)}(\circ dB(s), z(s)), \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

On note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire sur $T_{m_0}M$, identifié au produit scalaire sur $\mathbb{R}^d$. La proposition suivante donne une expression explicite de $\hat{D}$ utilisant D et δ.

Proposition 4 ([13])
Soit $z \in \mathcal{U}(\mathbb{P}(M) \times \mathbb{R}_+; T_{m_0})$ *adapté. On a*

$$\int_0^\infty \langle \hat{D}_t F, \dot{z}(t) \rangle dt = \int_0^\infty \langle D_t F, \dot{\hat{z}}(t) \rangle dt + \delta(q(\cdot, z) D.F), \tag{13}$$

$F \in \mathcal{S}(\mathbb{P}(M))$.

Soit $\mathrm{Id}_{\gamma(t)}$ l'identité de $T_{\gamma(t)}M$, $Q_{t,s} : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ la solution de

$$\frac{dQ_{t,s}}{dt} = -\frac{1}{2}\mathrm{ric}_{r(t)} Q_{t,s}, \quad Q_{s,s} = \mathrm{Id}_{\gamma(0)}, \quad 0 \le s \le t,$$

et

$$\tilde{z}(t) = \int_0^t Q_{t,s} \dot{z}(s) ds, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

On note $Q_{t,s}^* : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ l'adjoint de $Q_{t,s} : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$, $0 \le s < t$.

Définition 2 ([9])
Le gradient amorti $\tilde{D}$ *est défini par*

$$\tilde{D}_t F = \sum_{i=1}^{i=n} 1_{[0,t_i]}(t) Q_{t_i,t}^* \mathbf{t}_{0\leftarrow t_i} \nabla_i^M f(\gamma(t_1), \ldots, \gamma(t_n)), \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

pour $F = f(\gamma(t_1), \ldots, \gamma(t_n)) \in \mathcal{S}(\mathbb{P}(M))$.

Nous donnons maintenant une expression explicite de $\tilde{D}$ en termes de D et δ.

Proposition 5 ([13])
Si $z \in \mathcal{U}(\mathbb{P}(M) \times \mathbb{R}_+; \mathbb{R}^d)$ *est déterministe,*

$$\int_0^\infty \langle \tilde{D}_t F, \dot{z}(t) \rangle dt = \int_0^\infty \langle D_t F, \dot{z}(t) \rangle dt + \delta(q(\cdot, \tilde{z}) D.F), \quad F \in \mathcal{S}(\mathbb{P}(M)).$$

Preuve. On applique la Proposition 4 et les relations $\langle \tilde{D}F, \dot{z} \rangle = \langle \hat{D}F, \dot{\tilde{z}} \rangle$ et $\hat{\tilde{z}} = z$, cf. [9]. □

Prop. 5 implique que pour $F \in \mathcal{S}(\mathbb{P}(M))$, les processus $DF, \tilde{D}F \in L^2(\mathbb{P}(M) \times \mathbb{R}_+; T_{m_0})$ ont mêmes projections adaptées :

$$E[D_t F \mid \mathcal{F}_t] = E[\tilde{D}_t F \mid \mathcal{F}_t], \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad F \in \mathcal{S}(\mathbb{P}(M)), \tag{14}$$

et il en découle deux expressions pour la formule de Clark :

Proposition 6 ([9])
Soit $F \in \mathrm{Dom}(D) \cap \mathrm{Dom}(\tilde{D})$. *On a*

$$F = E[F] + \int_0^\infty \langle E[D_t F \mid \mathcal{F}_t], dB_t \rangle = E[F] + \int_0^\infty \langle E[\tilde{D}_t F \mid \mathcal{F}_t], dB_t \rangle.$$

Finalement on remarque que la formule de Clark pour le processus de Poisson admet deux formulations différentes, qui présentent une forte similitude avec le cas brownien riemannien. L'opérateur $\tilde{D}$ est ici le gradient défini par

$$\tilde{D}_t F = -\sum_{i=1}^{i=n} 1_{[0,T_i]}(t) \partial_i f(T_1, \ldots, T_n),$$

où $F = f(T_1, \ldots, T_n)$ est une fonctionnelle régulière des temps de saut $(T_k)_{k \geq 1}$ du processus de Poisson compensé $(N_t - t)_{t \in \mathbb{R}_+}$, qui est solution de (5) pour $\phi_t = 1$, $t \in \mathbb{R}_+$. On a

$$\tilde{D}_t F = D_t F - \delta(1_{[t,\infty[}(\cdot) \partial . D.F),$$

cf. [15], ce qui revient à écrire

$$\int_0^\infty \dot{z}(t) \tilde{D}_t F dt = \int_0^\infty \dot{z}(t) D_t F dt + \delta(q(\cdot, z) D.F),$$

avec $q(\cdot, z) = -\int_0^\cdot \dot{z}_s ds\, \partial.$, $\dot{z} \in L^2(\mathbb{R}_+)$. Par conséquent, la formule de Clark sur l'espace de Poisson admet aussi deux expressions, cf. [14], Th. 1 :

$$F = E[F] + \int_0^\infty E[D_t F \mid \mathcal{F}_t] d(N_t - t) = E[F] + \int_0^\infty E[\tilde{D}_t F \mid \mathcal{F}_t] d(N_t - t).$$

Des résultats sur les inégalités de Sobolev logarithmiques, et liés à ces formules sur l'espace de Poisson, peuvent être trouvées dans [1].

Références

[1] C. Ané. Grandes déviations et inégalités fonctionnelles pour des processus de Markov à temps continu sur un graphe. Thèse, Université Paul Sabatier - Toulouse III, 2000.

[2] C. Ané and M. Ledoux. On logarithmic Sobolev inequalities for continuous time random walks on graphs. *Probab. Theory Related Fields*, 116(4) :573–602, 2000.

[3] J.M. Bismut. *Large deviations and the Malliavin Calculus*, volume 45 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser, 1984.

[4] S. G. Bobkov and M. Ledoux. On modified logarithmic Sobolev inequalities for Bernoulli and Poisson measures. *J. Funct. Anal.*, 156(2) :347–365, 1998.

[5] M. Capitaine, E.P. Hsu, and M. Ledoux. Martingale representation and a simple proof of logarithmic Sobolev inequalities on path spaces. *Electron. Comm. Probab.*, 2 :71–81 (electronic), 1997.

[6] M. Dritschel and Ph. Protter. Complete markets with discontinuous security price. *Finance and Stochastics*, 3(2), 1999.

[7] Y. El-Khatib and N. Privault. Computations of replicating portfolios in complete markets driven by normal martingales. Preprint, 2000.

[8] M. Émery. On the Azéma martingales. In *Séminaire de Probabilités XXIII*, volume 1372 of *Lecture Notes in Mathematics*, pages 66–87. Springer Verlag, 1990.

[9] S. Fang and P. Malliavin. Stochastic analysis on the path space of a Riemannian manifold. I : Markovian stochastic calculus. *J. Funct. Anal.*, 118(1) :249–274, 1993.

[10] N. Ikeda and S. Watanabe. *Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes*. North-Holland, 1989.

[11] M. Jeanblanc and N. Privault. A complete market model with Poisson and Brownian components. To appear in Proceedings of the Seminar on Stochastic Analysis, Random Fields and Applications, Ascona, 1999.

[12] P. Malliavin. *Stochastic Analysis*, volume 313 of *Grundlehren Der Mathematischen Wissenschaften*. Springer Verlag, 1997.

[13] J.J. Prat and N. Privault. Explicit stochastic analysis of Brownian motion and point measures on Riemannian manifolds. *J. Funct. Anal.*, 167 :201–242, 1999.

[14] N. Privault. Chaotic and variational calculus in discrete and continuous time for the Poisson process. *Stochastics and Stochastics Reports*, 51 :83–109, 1994.

[15] N. Privault. A calculus on Fock space and its probabilistic interpretations. *Bull. Sci. Math.*, 123(2) :97–114, 1999.

[16] N. Privault. Logarithmic Sobolev inequalities for normal martingales. Preprint, 2000.

[17] N. Privault, J.L. Solé, and J. Vives. Chaotic Kabanov formula for the Azéma martingales. *Bernoulli*, 6(4), 2000.

[18] A.N. Shiryaev. *Essentials of stochastic finance*. World Scientific Publishing Co. Inc., River Edge, NJ, 1999.

[19] L. Wu. L^1 and modified logarithmic Sobolev inequalities and deviation inequalities for Poisson point processes. Preprint, 1998.

[20] L. Wu. A new modified logarithmic Sobolev inequality for Poisson point processes and several applications. Probab. Theory Relat. Fields, to appear, 2000.