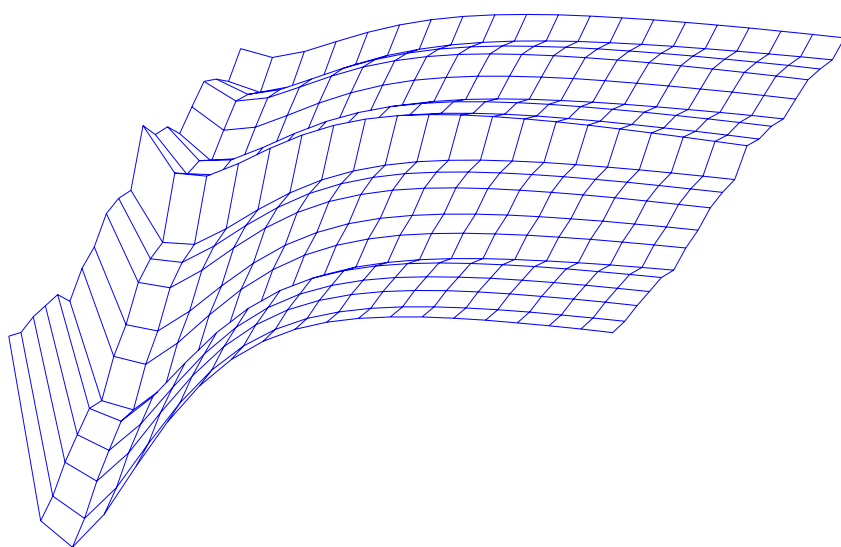


随机利率模型及相关衍生品定价

Nicolas Privault 著

韦晓 译

01/06/2025



序言

本书介绍了利率和债券市场的随机模拟和相关衍生产品的定价，这是一个日益重要的人们关注的专题，同时也是最近二十年来人们深入研究的课题。本书主要针对高年级的本科生和初级阶段的研究生，并设想读者已掌握基本的概率知识。我们所考虑的利率模型从短期利率模型到如Heath–Jarrow–Morton (HJM) 和 Brace–Gatarek–Musiela (BGM)远期利率模型，并给出相应模型界定的介绍。我们着重于概念和精确计算由浅到深的逐步介绍，特别是对于如利率上限和利率互换等相关衍生产品的定价。

让我们简短地来介绍一下利率建模的主要目标。总所周知，由于利率的连续复利计算原则，一个以固定利率 $r > 0$ 计算利息的银行账户在时刻 $t > 0$ 的现值 V_t 为

$$V_t = V_0 e^{rt}, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

它可以改写为微分形式

$$\frac{dV_t}{V_t} = r dt.$$

然而在实际的金融世界里，由于利率可以使一个随时间而随机变化的函数所以往往要更为复杂，在利率随时间随机变化的情形下，现值 V_t 为

$$V_t = V_0 \exp \left(\int_0^t r_s ds \right),$$

其中 $(r_s)_{s \in \mathbb{R}_+}$ 是一个时间相依的随机过程，在此称为短期利率过程。这种被称为短期利率的利率类型可以用随机微分方程通过多种方式来建模。

短期利率模型仍不满足交易工具的需要，这些交易工具往往要求能在当前时刻 t 达成一笔在未来时间区间 $[T, S]$ 以利率 $r(t, T, S)$, $t \leq T \leq S$ 贷款的协议。这就增加了利率建模的另一层次的复杂程度，为了迎合这种需要现在就要引入取决于三个时间指标的远期利率过程 $r(t, T, S)$ 。瞬时远期利率定义为 $T \mapsto F(t, T) := r(t, T, T)$ ，可以看做在固定的时刻 t 上的关于单个变量到期日 T 的函数。

从泛函分析的角度来看，远期利率过程 $r(t, T, S)$ 具有特别意义的，因为它们可重新解释为取值于二元变量函数空间上的过程 $t \mapsto r(t, \cdot, \cdot)$ 。因此远期利率建模很大程度上应用了取值于（无限维）函数空间上的随机过程，这与其他标准资产模型相比又增加了另一层次的技术难度。

现在让我们回到本书的内容上。头两章致力于随机计算的回顾和关于资产期权的经典 Black–Scholes定价理论。实际上，Black–Scholes公式是利率衍生产品定价的基本工具，特别是在BGM模型中它应当做一个渐近工具来使用。

下面，在 3章中简短地介绍了短期利率模型之后，我们在 4章开始介绍零息债券的定义和定价。零息债券可由短期利率过程直接构造并提供了构造远期利率过程的基础。

远期利率，瞬时利率及其用函数空间（如 Nelson–Siegel 和 Svensson空间）的建模将在第 5章中考虑。模拟远期利率的随机Heath–Jarrow–Morton 模型和相应的无套利条件将在第 6章中介绍。

远期测度的构造及其后的利率衍生产品的定价将在第 7章中给出，同时也给出其在 债券期权定价的应用。估计和拟合利率曲线中出现的问题将在第 8章中考虑。这一问题的解决将引出二元模型的介绍。

最后两章第9和 10章分别介绍LIBOR市场和Brace–Gatarek–Musiela (BGM)模拟，并给出模型界定的要点。为了行文的简洁我们的方法仅限于一维布朗运动模型，更多关于利率建模理论的完整介绍，包括多元模型，我们推荐参考 [Bjö04], [BM06], [JW01], [CT06], [Sch05]。

本书还包括了两个附录，附录 A 关于数学的准备工具，附录 B 是关于该领域的未来的发展和展望。每章中附带的练习的完整答案在本书的最后部分给出。一些练习是本书原创的，而另一些是典型习题或者是从 [Kij03] 和 [Øks03] 来的。

最后需要指出的是本书是作者在法国国家信息与自动化研究所巴黎分所金融数学组开始随机利率模型的研究之后，再给香港城市大学金融和精算科学方向的数学硕士生讲授的随机利率模型课程，由该课程的讲义整理并而成。我非常感谢香港城市大学数学系给我提供了出色的工作环境和讲授这门新课程的机会，也和感谢金融数学组给我在随机利率建模研究的鼓励。同时也感谢金融和精算科学方向的数学硕士生对讲义草稿的修正和建议。

中文版序言

本书是由世界科技出版社于2008年首次出版的英文教材 “An Elementary Introduction to Stochastic Interest Rate Modeling” 的中文译本。本译本是英文版的一个修改 和增订版本，包括了一些校正和新增的练习及其解答。我们感谢 英国University of Reading的Ubbo Wiersema对本书第一版的认真阅读，使本书得到了很多改进。

香港,
北京,
2009年11月

Nicolas Privault
韦晓

目 录

第一章 随机计算的回顾	1
1.1 Brown 运动	1
1.2 随机积分	2
1.3 平方变差	8
1.4 伊藤公式	10
1.5 练习	12
第二章 Black-Scholes 定价理论的回顾	15
2.1 买入和卖出期权	15
2.2 市场模型和投资组合	17
2.3 偏微分方程方法	18
2.4 Girsanov 定理	19
2.5 鞅方法	22
2.6 练习	29
第三章 短期利率模型	31
3.1 均值回归模型	31
3.2 常数方差弹性 (CEV) 模型	32
3.3 时间相依模型	32
3.4 练习	33
第四章 零息债券的定价	35
4.1 定义和基本性质	35
4.2 无套利和马氏性	36
4.3 无套利和鞅性	38
4.4 偏微分方程的解: 概率方法	40
4.5 偏微分方程的解: 分析方法	42
4.6 数值模拟	43
4.7 练习	45

第五章	远期利率模拟	49
5.1	远期合约	49
5.2	瞬时远期利率	52
5.3	短期利率	54
5.4	远期利率的参数化	55
5.5	曲线估计	56
5.6	练习	57
第六章	Heath–Jarrow–Morton (HJM) 模型	59
6.1	目标重述	59
6.2	远期 Vasicek 利率	61
6.3	远期即时利率的动力系统	65
6.4	HJM 条件	67
6.5	短期利率的马氏性	69
6.6	Hull–White 模型	71
6.7	练习	72
第七章	远期测度和衍生产品定价	73
7.1	远期测度	73
7.2	远期测度下的演变过程	76
7.3	衍生产品的定价	80
7.4	测度逆变换	84
7.5	练习	85
第八章	拟合曲线和二元模型	88
8.1	曲线拟合	88
8.2	确定漂移项	91
8.3	相关性问题的	92
8.4	二元模型	94
8.5	练习	101
第九章	LIBOR模型中利率上限和利率互换期权的定价	105
9.1	利率上限的定价	105

9.2	远期利率测度和期限结构	107
9.3	互换和互换期权	111
9.4	伦敦银行间同业拆借利率 (LIBOR) 模型	113
9.5	LIBOR市场中的互换率	115
9.6	远期互换率测度	116
9.7	LIBOR模型中的互换期权定价	122
9.8	练习	124
第十章	Brace–Gatarek–Musiela (BGM) 模型	127
10.1	BGM 模型	127
10.2	利率上限定价	130
10.3	互换期权定价	131
10.4	BGM模型的界定	136
10.5	练习	138
第十一章	附录A:数学工具	141
第十二章	附录B: 相关进展	149
第十三章	练习的答案	152
	参考文献	192
	索引	195

插图目录

1.1	一个二维Brown 运动的样本轨道。	2
1.2	3维Brown 运动的样本轨道。	3
2.1	由几何Brown运动驱动的价格过程的样本。	16
2.2	飘移Brown运动的路径。	20
4.1	$t \mapsto B_t$ 的图形。	43
4.2	$t \mapsto r_t$ 的图形。	43
4.3	$t \mapsto P(t, T)$ 和 $t \mapsto e^{-r_0(T-t)}$ 的图形。	44
4.4	$t \mapsto A(T - t)$ 的图形。	44
4.5	$t \mapsto C(T - t)$ 的图形。	45
4.6	$(x, t) \mapsto \exp(A(T - t) + xC(T - t))$ 的图形。	45
5.1	$T \mapsto f(t, T, T + \delta)$ 的图像。	50
5.2	远期利率过程 $t \mapsto f(t, T, S)$ 。	51
5.3	瞬时远期利率 $t \mapsto f(t, T)$ 。	53
5.4	瞬时远期利率 $T \mapsto f(0, T)$ 。	54
5.5	Nelson-Siegel模型中 $x \mapsto g(x)$ 的图形。	55
5.6	Svensson模型中 $x \mapsto g(x)$ 的图形。	56
6.1	远期利率的随机过程。	62
6.2	Vasicek模型下的远期瞬时利率曲线 $(t, x) \mapsto f(t, t + x)$ 。	63
6.3	Vasicek模型下的短期利率曲线 $t \mapsto r_t$ 。	64
6.4	LIBOR远期利率的市场数据 $T \mapsto f(t, T, T + \delta)$ 。	65
8.1	远期利率的图形。	88
8.2	Vasicek模型中的远期瞬时利率曲线 $(t, x) \mapsto f(t, t + x)$ 。	89
8.3	市场数据 vs Svensson曲线的对比。	90
8.4	$t \mapsto P(t, T_3)$ 的图形。	92
8.5	$t \mapsto P(t, T_2)$ 的图形。	93
8.6	$t \mapsto P(t, T_1)$ 的图形。	93

8.7	二元模型中远期利率的图形。	101
9.1	基于利率期限结构的远期利率.	106
9.2	$t \mapsto L(t, t, T)$ 的图形.	114
9.3	$T \mapsto L(0, T, T + \delta)$ 的图形.	115
10.1	利率上限波动率	131
10.2	互换期权的波动率.	136
10.3	市场互换期权的波动率.	136
10.4	计算出的互换波动率.	138
10.5	图形的比较.	138
10.6	数值结果。	139

第一章 随机计算的回顾

由于Brown 运动和随机积分是模拟利率过程的关键工具，我们在此囊括了这些知识的回顾。为了行文简洁，我们关于随机积分的介绍仅限于对平方可积过程的并且我们推荐 读者查阅一些更高级文本，如[Pro05]以获得全面介绍。

§1.1 Brown 运动

设 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 是一个概率空间。模拟金融中的随机资产主要是基于随机过程，它是一族以时间区间 I 的时刻为下标的 随机变量 $(X_t)_{t \in I}$ 。

我们首先来回忆Brown 运动的定义，它是随机过程的最基本的特例。

定义 1.1. *Brown 运动* 是一个随机过程 $(B_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ 满足

1. $B_0 = 0$ 几乎处处成立,
2. 样本轨道 $t \mapsto B_t$ 是（几乎处处）连续的。
3. 对于任意的有限个数的时间序列 $t_0 < t_1 < \dots < t_n$, 增量

$$B_{t_1} - B_{t_0}, B_{t_2} - B_{t_1}, \dots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$$

是相互独立的。

4. 对任意时间点 $0 \leq s < t$, $B_t - B_s$ 服从均值为0方差为 $t - s$ 的正态分布。

为了方便我们有时将Brown 运动看作是在区间长为 dt 的无穷小时间区间内的随机游动，具有时间区间 $[t, t + dt]$ 内的增量

$$\Delta B_t = \pm \sqrt{dt} \tag{1.1}$$

并有相等的概率 $1/2$ 。

今后，我们设 $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ 表示由 $(B_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ 生成的信息流（即一族单调非降的 $\mathcal{F}$ 的子 σ -代数，参见附录 A），即：

$$\mathcal{F}_t = \sigma(B_s : 0 \leq s \leq t), \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

n 维 Brown 运动可构造为

$$(B_t^1, \dots, B_t^n)_{t \in \mathbb{R}_+}$$

其中 $(B_t^1)_{t \in \mathbb{R}_+}, \dots, (B_t^n)_{t \in \mathbb{R}_+}$ 是 $(B_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ 的相互独立的复制。

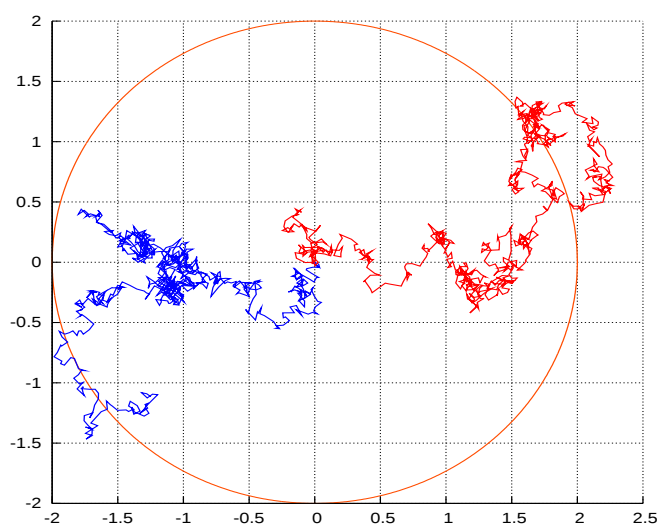


图 1.1: 一个二维 Brown 运动的样本轨道。

下面我们分别来模拟 2 维和 3 维的 Brown 运动见图 1.1 和 1.2。注意到由布朗在 1827 年最早发现的花粉颗粒运动实际上就是 2 维的。

§1.2 随机积分

在本节中我们构造平方可积适应过程关于 Brown 运动的伊藤随机积分。随机积分在金融中主要用于模拟由（随机）风险资产驱动的投资组合的价值变化。

定义 1.2. 称过程 $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ 是 $\mathcal{F}_t$ -适应的，若对所有的 $t \in \mathbb{R}_+$ ， X_t 是 $\mathcal{F}_t$ -可测的。

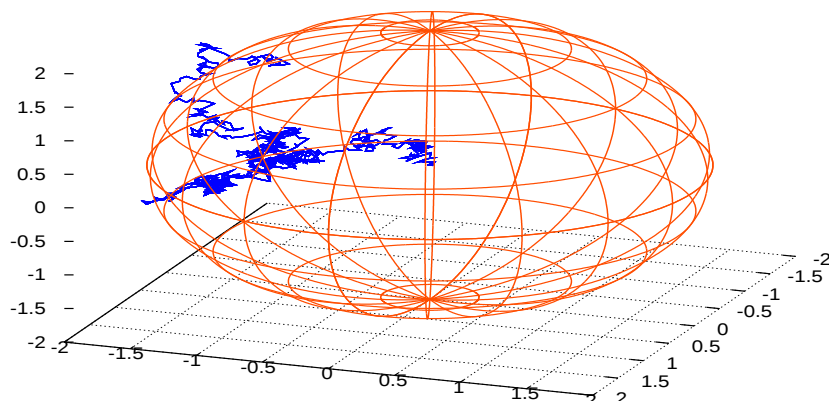


图 1.2: 3维Brown 运动的样本轨道。

换句话说, $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ 是 $\mathcal{F}_t$ -适应的当 X_t 在时刻 t 的取值仅依赖于到时刻 t 为止的Brown 运动路径中所包含的信息。

定义 1.3. 设 $L^p(\Omega \times \mathbb{R}_+)$ 表示 p -可积过程的空间, 即满足

$$\mathbb{E} \left[\int_0^\infty |u_t|^p dt \right] < \infty$$

的随机过程 $u : \Omega \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ 的空间, 又设 $L_{ad}^p(\Omega \times \mathbb{R}_+)$, $p \in [1, \infty]$, 表示 $L^p(\Omega \times \mathbb{R}_+)$ 中 $\mathcal{F}_t$ -适应过程的空间。

关于Brown 运动的随机积分的简单定义应包括如下的写法

$$\int_0^\infty f(t) dB_t = \int_0^\infty f(t) \frac{dB_t}{dt} dt,$$

但是由于Brown 运动路径的不可微导致了这样定义的失败:

$$\frac{dB_t}{dt} = \frac{\pm \sqrt{dt}}{dt} = \pm \frac{1}{\sqrt{dt}} \simeq \pm \infty.$$

取而代之, 随机积分首先被构造为关于简单可料过程的积分。

定义 1.4. 设 $\mathcal{P}$ 表示 形如

$$u_t = \sum_{i=1}^n F_i \mathbf{1}_{(t_{i-1}^n, t_i^n]}(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad (1.2)$$

简单可料随机过程 $(u_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ 的空间, 其中 $F_i \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_{t_{i-1}^n}, \mathbb{P})$ 是 $\mathcal{F}_{t_{i-1}^n}$ -可测的, $i = 1, \dots, n$.

容易证明简单可料随机过程的集合 $\mathcal{P}$ 构成一个线性空间, 由 [IW89] 22页和 46页的引理 1.1可知, 对于任意的 $p \geq 1$, 简单可料过程空间 $\mathcal{P}$ 在 $L_{ad}^p(\Omega \times \mathbb{R}_+)$ 中是稠密的。

命题 1.1. 定义在形如 (1.2) 的简单可料过程 $(u_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ 上的关于 Brown 运动 $(B_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ 的随机积分为

$$\int_0^\infty u_t dB_t := \sum_{i=1}^n F_i (B_{t_i} - B_{t_{i-1}}), \quad (1.3)$$

并可通过对偶公式

$$\mathbb{E} \left[\int_0^\infty u_t dB_t \int_0^\infty v_t dB_t \right] = \mathbb{E} \left[\int_0^\infty u_t v_t dt \right] \quad (1.4)$$

将该积分推广到定义在 $u \in L_{ad}^2(\Omega \times \mathbb{R}_+)$ 上。

证明. 我们先证明对偶公式 (1.4) 对于简单可料过程 $u = \sum_{i=1}^n G_i \mathbf{1}_{(t_{i-1}, t_i]}$, $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n$ 成立:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\left(\int_0^\infty u_t dB_t \right)^2 \right] &= \mathbb{E} \left[\left(\sum_{i=1}^n G_i (B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) \right)^2 \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^n |G_i|^2 (B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2 \right] \\ &\quad + 2 \mathbb{E} \left[\sum_{1 \leq i < j \leq n} G_i G_j (B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) (B_{t_j} - B_{t_{j-1}}) \right] \\ &= \sum_{i=1}^n \mathbb{E} [\mathbb{E}[|G_i|^2 (B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2 | \mathcal{F}_{t_{i-1}}]] \\ &\quad + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathbb{E} [\mathbb{E}[G_i G_j (B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) (B_{t_j} - B_{t_{j-1}}) | \mathcal{F}_{t_{j-1}}]] \\ &= \sum_{i=1}^n \mathbb{E} [|G_i|^2 \mathbb{E}[(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2 | \mathcal{F}_{t_{i-1}}]] \\ &\quad + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathbb{E} [G_i G_j \mathbb{E}[(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) (B_{t_j} - B_{t_{j-1}}) | \mathcal{F}_{t_{j-1}}]] \\ &= \sum_{i=1}^n \mathbb{E} [|G_i|^2 \mathbb{E}[(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2 | \mathcal{F}_{t_{i-1}}]] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & +2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathbb{E}[G_i G_j (B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) \mathbb{E}[(B_{t_j} - B_{t_{j-1}}) | \mathcal{F}_{t_{j-1}}]] \\
 & = \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^n |G_i|^2 (t_i - t_{i-1}) \right] = \mathbb{E}[\|u\|_{L^2(\mathbb{R}_+)}^2].
 \end{aligned}$$

应用对偶公式(1.4)，随机积分算子可通过稠密性和Cauchy序列理论推广到 $L_{ad}^2(\Omega \times \mathbb{R}_+)$ 上。

□

实际上随机积分(1.3)将在下面的(2.9)式中用来表示投资组合的价值。

对于所有的 $u \in L_{ad}^2(\Omega \times \mathbb{R}_+)$ ，积分区间 $[a, b]$ 上的伊藤积分被定义为

$$\int_a^b u_s dB_s := \int_0^\infty \mathbf{1}_{[a,b]}(s) u_s dB_s, \quad 0 \leq a \leq b,$$

并有关系式

$$\int_a^c u_s dB_s = \int_a^b u_s dB_s + \int_b^c u_s dB_s, \quad 0 \leq a \leq b \leq c,$$

和

$$\int_a^b dB_s = B_b - B_a, \quad 0 \leq a \leq b.$$

并且随机积分是一个线性算子，即：

$$\int_0^\infty (u_s + v_s) dB_s = \int_0^\infty u_s dB_s + \int_0^\infty v_s dB_s, \quad u, v \in L_{ad}^2(\Omega \times \mathbb{R}_+).$$

下一性质展示了如何通过积分区域的分割来计算随机积分的条件期望。

命题 1.2. 对于任意的 $u \in L_{ad}^2(\Omega \times \mathbb{R}_+)$ 有

$$\mathbb{E} \left[\int_0^\infty u_s dB_s \mid \mathcal{F}_t \right] = \int_0^t u_s dB_s, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

特别地， $\int_0^t u_s dB_s$ 是 $\mathcal{F}_t$ -可测的， $t \in \mathbb{R}_+$ 。

证明. 设 $u \in \mathcal{P}$ 具有形式 $u = G \mathbf{1}_{(a,b]}$ ，其中 G 是有界的 且 $\mathcal{F}_a$ -可测。

i) 若 $0 \leq a \leq t$ 有

$$\begin{aligned}\mathbb{E} \left[\int_0^\infty u_s dB_s \mid \mathcal{F}_t \right] &= \mathbb{E} [G(B_b - B_a) \mid \mathcal{F}_t] \\ &= G \mathbb{E} [(B_b - B_a) \mid \mathcal{F}_t] \\ &= G \mathbb{E} [(B_b - B_t) \mid \mathcal{F}_t] + G \mathbb{E} [(B_t - B_a) \mid \mathcal{F}_t] \\ &= G(B_t - B_a) \\ &= \int_0^\infty \mathbf{1}_{[0,t]}(s) u_s dB_s.\end{aligned}$$

ii) 若 $0 \leq t \leq a$ 对所有有界 $\mathcal{F}_t$ -可测的随机变量 F 有:

$$\mathbb{E} \left[F \int_0^\infty u_s dB_s \right] = \mathbb{E} [FG(B_b - B_a)] = 0,$$

因此

$$\begin{aligned}\mathbb{E} \left[\int_0^\infty u_s dB_s \mid \mathcal{F}_t \right] &= \mathbb{E} [G(B_b - B_a) \mid \mathcal{F}_t] \\ &= 0 \\ &= \int_0^\infty \mathbf{1}_{[0,t]}(s) u_s dB_s.\end{aligned}$$

由于 L^2 空间条件期望具有连续性, 上述结论可通过线性性和稠密性推广, 则有:

$$\begin{aligned}& \mathbb{E} \left[\left(\int_0^t u_s dB_s - \mathbb{E} \left[\int_0^\infty u_s dB_s \mid \mathcal{F}_t \right] \right)^2 \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\left(\int_0^t u_s^n dB_s - \mathbb{E} \left[\int_0^\infty u_s dB_s \mid \mathcal{F}_t \right] \right)^2 \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\left(\mathbb{E} \left[\int_0^\infty u_s^n dB_s - \int_0^\infty u_s dB_s \mid \mathcal{F}_t \right] \right)^2 \right] \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\mathbb{E} \left[\left(\int_0^\infty u_s^n dB_s - \int_0^\infty u_s dB_s \right)^2 \mid \mathcal{F}_t \right] \right] \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\left(\int_0^\infty (u_s^n - u_s) dB_s \right)^2 \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\int_0^\infty |u_s^n - u_s|^2 ds \right] \\ &= 0.\end{aligned}$$

□

特别地, 由于 $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, $\text{It}\hat{o}$ 是一个中心化随机变量:

$$\mathbb{E} \left[\int_0^\infty u_s dB_s \right] = 0. \quad (1.5)$$

下面是性质 1.2 的一个直接推论。

推论 1.1. $u \in L^2_{ad}(\Omega \times \mathbb{R}_+)$ 的不定随机积分 $\left(\int_0^t u_s dB_s \right)_{t \in \mathbb{R}_+}$ 是一个鞅, 即:

$$\mathbb{E} \left[\int_0^t u_\tau dB_\tau \mid \mathcal{F}_s \right] = \int_0^s u_\tau dB_\tau, \quad 0 \leq s \leq t.$$

作为上述推论的一个直接结果我们有

$$\mathbb{E} \left[\int_t^\infty u_\tau dB_\tau \mid \mathcal{F}_t \right] = 0, \quad \text{and} \quad \mathbb{E} \left[\int_0^t u_\tau dB_\tau \mid \mathcal{F}_t \right] = \int_0^t u_\tau dB_\tau. \quad (1.6)$$

特别地, 对于所有的 $u \in L^2_{ad}(\Omega \times \mathbb{R}_+)$ $\int_0^t u_\tau dB_\tau$ 是 $\mathcal{F}_t$ -可测的.

我们以一个确定函数的随机积分的 Gauss 性质注解来结束本节。

命题 1.3. 设 $f \in L^2(\mathbb{R}_+)$. 随机积分

$$\int_0^\infty f(t) dB_t$$

是一个 Gauss 随机变量均值为 0 方差为

$$\int_0^\infty |f(t)|^2 dt.$$

证明. 由关系式

$$\text{Var}(\alpha X) = \alpha^2 \text{Var}(X),$$

见附录 A, 简单函数

$$f(t) = \sum_{k=1}^n a_k \mathbf{1}_{(t_k, t_{k-1}]}(t)$$

的随机积分

$$\int_0^\infty f(t) dB_t := \sum_{k=1}^n a_k (B_{t_k} - B_{t_{k-1}})$$

服从中心化的Gauss分布具有方差

$$\begin{aligned}
 \text{Var} \left[\int_0^\infty f(t) dB_t \right] &= \sum_{k=1}^n a_k \text{Var}[B_{t_k} - B_{t_{k-1}}] \\
 &= \sum_{k=1}^n |a_k|^2 (t_k - t_{k-1}) \\
 &= \sum_{k=1}^n |a_k|^2 \int_{t_{k-1}}^{t_k} dt \\
 &= \int_0^\infty |f(t)|^2 dt,
 \end{aligned}$$

本性质的结论可通过 $L^2(\mathbb{R}_+)$ 空间简单函数的稠密性推广得到。 $\square$

特别地, 如果 $f \in L^2(\mathbb{R}_+)$ 伊藤对偶公式 (1.4) 表明

$$\mathbb{E} \left[\left(\int_0^\infty f(t) dB_t \right)^2 \right] = \int_0^\infty |f(t)|^2 dt.$$

§1.3 平方变差

现在我们来介绍Brown 运动的平方变差的概念。

定义 1.5. $(B_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ 的平方变差 定义为过程 $([B, B]_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$, 形如

$$[B, B]_t = B_t^2 - 2 \int_0^t B_s dB_s, \quad t \in \mathbb{R}_+. \quad (1.7)$$

现设

$$\pi^n = \{0 = t_0^n < t_1^n < \cdots < t_{n-1}^n < t_n^n = t\}$$

表示区间 $[0, t]$ 的一个划分, 使得当 n 趋于无穷时,

$$|\pi^n| := \max_{i=1, \dots, n} |t_i^n - t_{i-1}^n|$$

收敛于0.

命题 1.4. 我们有

$$[B, B]_t = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (B_{t_i^n} - B_{t_{i-1}^n})^2, \quad t \geq 0,$$

其中极限存在于 $L^2(\Omega)$ 且与所选划分序列 $(\pi^n)_{n \in \mathbb{N}}$ 无关。

证明. 作为随机积分定义 1.3 的一个直接结果我们有

$$B_s(B_t - B_s) = \int_s^t B_s dB_\tau, \quad 0 \leq s \leq t,$$

则

$$\begin{aligned} [B, B]_{t_i^n} - [B, B]_{t_{i-1}^n} &= B_{t_i^n}^2 - B_{t_{i-1}^n}^2 - 2 \int_{t_{i-1}^n}^{t_i^n} B_s dB_s \\ &= (B_{t_i^n} - B_{t_{i-1}^n})^2 + 2 \int_{t_{i-1}^n}^{t_i^n} (B_{t_{i-1}^n} - B_s) dB_s, \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} &\mathbb{E} \left[\left([B, B]_t - \sum_{i=1}^n (B_{t_i^n} - B_{t_{i-1}^n})^2 \right)^2 \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\left(\sum_{i=1}^n [B, B]_{t_i^n} - [B, B]_{t_{i-1}^n} - (B_{t_i^n} - B_{t_{i-1}^n})^2 \right)^2 \right] \\ &= 4 \mathbb{E} \left[\left(\sum_{i=1}^n \int_0^t \mathbf{1}_{(t_{i-1}^n, t_i^n]}(s) (B_s - B_{t_{i-1}^n}) dB_s \right)^2 \right] \\ &= 4 \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}^n}^{t_i^n} (B_s - B_{t_{i-1}^n})^2 ds \right] \\ &= 4 \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}^n}^{t_i^n} (s - t_{i-1}^n)^2 ds \right] \\ &\leq 4t|\pi|. \end{aligned}$$

□

从 Brown 运动的不严格表达式(1.1)可将其看作是随机游动，那么下一个性质可以简单地解释为 $(\Delta B_t)^2 = dt$.

命题 1.5. *Brown* 运动 $(B_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ 的平方变差是

$$[B, B]_t = t, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

证明. (参见 [Pro05], 定理 I-28). 对于每一个划分

$$\{0 = t_0^n < \cdots < t_n^n = t\}$$

由Brown 运动的独立增量性我们有:

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[\left(t - \sum_{i=1}^n (B_{t_i^n} - B_{t_{i-1}^n})^2 \right)^2 \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\left(\sum_{i=1}^n (B_{t_i^n} - B_{t_{i-1}^n})^2 - (t_i^n - t_{i-1}^n) \right)^2 \right] \\ &= \sum_{i=1}^n (t_i^n - t_{i-1}^n)^2 \mathbb{E} \left[\left(\frac{(B_{t_i^n} - B_{t_{i-1}^n})^2}{t_i^n - t_{i-1}^n} - 1 \right)^2 \right] \\ &= \mathbb{E}[(Z^2 - 1)^2] \sum_{i=0}^n (t_i^n - t_{i-1}^n)^2 \\ &\leq t|\pi|\mathbb{E}[(Z^2 - 1)^2], \end{aligned}$$

其中 Z 是一个标准的Gauss随机变量。 □

§1.4 伊藤公式

运用规则 $(dB_t)^2 = (\pm\sqrt{dt})^2 = dt$, 泰勒公式可以粗略的写为

$$\begin{aligned} df(B_t) &= f'(B_t)dB_t + \frac{1}{2}f''(B_t)(dB_t)^2 \\ &= f'(B_t)dB_t + \frac{1}{2}f''(B_t)dt. \end{aligned}$$

伊藤公式给出了上述结果对如下过程 X_t 的一个推广

$$X_t = X_0 + \int_0^t u_s dB_s + \int_0^t v_s ds, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

其中 u_t, v_t 为适应的充分可积过程。

对于 $f \in \mathcal{C}^{1,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$, 伊藤公式 可用积分形式表达为

$$\begin{aligned} f(t, X_t) = & f(0, X_0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, X_s) u_s dB_s \\ & + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, X_s) v_s ds + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial s}(s, X_s) ds + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s, X_s) u_s^2 ds, \end{aligned} \quad (1.8)$$

或用微分形式表达为:

$$\begin{aligned} df(t, X_t) = & \frac{\partial f}{\partial x}(t, X_t) u_t dB_t \\ & + \frac{\partial f}{\partial x}(t, X_t) v_t dt + \frac{\partial f}{\partial t}(t, X_t) dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, X_t) u_t^2 dt. \end{aligned}$$

对于 d 维 Brown 运动 $(B_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ 和所有的 $\mathcal{C}^2$ 函数 f , 伊藤公式为

$$f(B_t) = f(B_0) + \int_0^t \langle \nabla f(B_s), dB_s \rangle_H + \frac{1}{2} \int_0^t \Delta f(B_s) ds,$$

其中 ∇ 和 Δ 分别为作用于 $\mathbb{R}^n$ 的梯度算子和拉普拉斯算子。现在考虑两个过程 X_t 和 Y_t , 分别为

$$X_t = X_0 + \int_0^t u_s dB_s^1 + \int_0^t v_s ds, \quad t > 0,$$

和

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t \xi_s dB_s^2 + \int_0^t \zeta_s ds, \quad t > 0,$$

其中 u_t, v_t, ξ_t, ζ_t 是适应且充分可积的过程, 且 B^1, B^2 是相关系数为 $\rho \in [-1, 1]$ 的两个 Brown 运动, 即它们的 协方差为

$$dB_t^1 \cdot dB_t^2 = \rho dt.$$

关于这两个变量的伊藤公式为

$$\begin{aligned} f(t, X_t, Y_t) = & f(0, X_0, Y_0) + \int_0^t u_s \frac{\partial f}{\partial x}(s, X_s, Y_s) dB_s^1 + \int_0^t \xi_s \frac{\partial f}{\partial y}(s, X_s, Y_s) dB_s^2 \\ & + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial s}(s, X_s, Y_s) ds + \int_0^t v_s \frac{\partial f}{\partial x}(s, X_s, Y_s) ds + \int_0^t \zeta_s \frac{\partial f}{\partial y}(s, X_s, Y_s) ds \\ & + \frac{1}{2} \int_0^t u_s^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s, X_s, Y_s) ds + \frac{1}{2} \int_0^t \xi_s^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(s, X_s, Y_s) ds \end{aligned}$$

$$+\rho \int_0^t u_s \xi_s \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(s, X_s, Y_s) ds.$$

我们引用随机微分方程的一个经典结果，参见[Pro05], 定理 V-7, 来结束本章。设

$$\sigma : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^n$$

其中 $\mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^n$ 表示 $d \times n$ 维矩阵空间，并且

$$b : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

满足整体李普希兹条件

$$\|\sigma(t, x) - \sigma(t, y)\|^2 + \|b(t, x) - b(t, y)\|^2 \leq K^2 \|x - y\|^2,$$

$t \in \mathbb{R}_+, x, y \in \mathbb{R}^n$. 则存在随机微分方程

$$X_t = X_0 + \int_0^t \sigma(s, X_s) dB_s + \int_0^t b(s, X_s) ds,$$

的唯一强解，其中 $(B_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ 是一个 d 维的 Brown 运动。

§1.5 练习

练习 1.1. 设 $c > 0$. 利用布朗运动 $(B_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ 的定义, 证明:

1. $(B_{c+t} - B_c)_{t \in \mathbb{R}_+}$ 是一个布朗运动.
2. $(cB_{t/c^2})_{t \in \mathbb{R}_+}$ 是一个布朗运动.

练习 1.2. 求解随机微分方程

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t.$$

其中 $\mu, \sigma > 0$.

练习 1.3. 求解随机微分方程

$$dX_t = -\alpha X_t dt + \sigma dB_t, \quad X_0 = 1,$$

其中 $\alpha > 0$ 且 $\sigma > 0$. 提示. 找出形如

$$X_t = a(t) \left(X_0 + \int_0^t b(s) dB_s \right),$$

的一个解, 其中 $a(\cdot)$ 且 $b(\cdot)$ 是确定的函数。

练习 1.4. 求解随机微分方程

$$dX_t = tX_t dt + e^{t^2/2} dB_t, \quad X_0 = x_0.$$

提示. 找出形如

$$X_t = a(t) \left(X_0 + \int_0^t b(s) dB_s \right),$$

的一个解, 其中 $a(\cdot)$ 和 $b(\cdot)$ 是确定的函数。

练习 1.5. 求解随机微分方程

$$dY_t = (2\mu Y_t + \sigma^2) dt + 2\sigma \sqrt{Y_t} dB_t,$$

其中 $\mu, \sigma > 0$. 提示. 设 $X_t = \sqrt{Y_t}$.

练习 1.6. 设 $f \in L^2([0, T])$. 计算条件期望

$$E \left[e^{\int_0^T f(s) dB_s} \mid \mathcal{F}_t \right], \quad 0 \leq t \leq T,$$

其中 $(\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}$ 表示由 $(B_t)_{t \in [0, T]}$ 产生的信息流。

练习 1.7. 对于任意的 $\beta < 1/T$, 计算期望

$$E \left[\exp \left(\beta \int_0^T B_t dB_t \right) \right].$$

提示: 用伊藤公式展开 $(B_T)^2$ 。

练习 1.8. 给定 $T > 0$, 设 $(X_t^T)_{t \in [0, T]}$ 表示在初始条件 $X_0^T = 0$ 和 $\sigma > 0$ 下的随机微分方程

$$dX_t^T = \sigma dB_t - \frac{X_t^T}{T-t} dt, \quad t \in [0, T]$$

的解。

1. 证明

$$X_t^T = \sigma(T-t) \int_0^t \frac{1}{T-s} dB_s, \quad t \in [0, T].$$

提示: 首先用伊藤公式计算 $d(X_t^T/(T-t))$ 。

2. 证明对于 $t \in [0, T]$, $\mathbb{E}[X_t^T] = 0$ 。

3. 证明对于任意的 $t \in [0, T]$, 有 $\text{Var}[X_t^T] = \sigma^2 t(T-t)/T$ 。

4. 证明 $X_T^T = 0$ 。过程 $(X_t^T)_{t \in [0, T]}$ 是所谓的布朗桥。

第二章 Black–Scholes定价理论的回顾

Black–Scholes公式被认为是金融衍生品定价的基石之一，并且它的重要性不仅局限于股票期权的定价。实际上，由于利率模型的复杂性使得一般难以得到显式的表达式，且在很多情形下必须依赖于Black–Scholes框架来得到利率衍生产品的定价公式，特别是在BGM模型，参见 9章。

§2.1 买入和卖出期权

股票购买者在时刻 t 时最关心的是在未来的某个时刻 T 股票价格 S_T 是否会下降。购买者可以通过在现金市场购买一个允许他以在初始时刻 t 定下的保证价格 K 在时刻 T 卖出他的资产的合约来寻求保护。

这个合约被称为敲定价格为 K 到期日为 T 的卖出期权。当股票价格 S_T 跌到低于水平 K ，执行合约将使得期权的买方比没有签购期权的其他人多获得相当于 $K - S_T$ 的收益。假设没有交易费用和其他费用，作为回报，期权的卖方将遭受同样相当于 $K - S_T$ 的损失。

在一般情况下，一个（所谓欧式）卖出期权的损益表达为

$$(K - S_T)^+ = \begin{cases} K - S_T & \text{if } S_T \leq K, \\ 0 & \text{if } S_T \geq K. \end{cases}$$

为了使这个合约是公平的，期权的买方应该在签订合约时支付一定的费用（类似于保险费）。该费用的计算是一个重要问题，这就是所谓的期权定价。

图 2.1中解释当 S_T 高于 K 或者低于 K 的两种可能情形。

另外一方面，如果交易员想要买入某种股票或者商品，那么他将对价格不会上涨感兴趣并且他可能买进一个买入期权，这是一个使得他能在时刻 T 以在时刻 t 就定下的水平 K 来购买他所要的资产的合约。



图 2.1: 由几何Brown运动驱动的价格过程的样本。

在此，当 S_T 涨到高于 K 的情形时，相比其他没有签购买入期权的机构，期权的购买者将得到相当于 $S_T - K$ 的潜在收益。

一般来说，一个（所谓的欧式）买入期权有损益函数

$$\phi(S_T) = (S_T - K)^+ = \begin{cases} S_T - K & \text{if } S_T \geq K, \\ 0, & \text{if } S_T \leq K. \end{cases}$$

与将出现在下一章的利率模型相关联，我们在此注意到类似的合约可以应用于利率上。

一个合约通过让还款率不高于水平 κ 从而使得利率等于 $\min(r_t, \kappa)$ 来保护以变利率 r_t 还款的还款人。这个相应的合约被称为利率上限，并且潜在地给予了它的购买者一个以利率点来度量的 $(r_t - \kappa)^+$ 的优惠。利率上限的相反合约被称为利率下限且提供了类似的保护，这次是为了借款人的利益而防止利率下跌。

经典的Black-Scholes公式对于利率衍生产品的定价非常重要，因为我们将考虑的一些利率模型是基于几何Brown运动的。

§2.2 市场模型和投资组合

设 $r : \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}$, $\mu : \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}$ 和 $\sigma : \mathbf{R}_+ \rightarrow (0, \infty)$ 是确定的有界非负函数。

设 $(A_t)_{t \in \mathbf{R}_+}$ 是一个无风险资产，其价格为

$$\frac{dA_t}{A_t} = r_t dt, \quad A_0 = 1, \quad t \in \mathbf{R}_+, \quad (2.1)$$

即

$$A_t = A_0 \exp \left(\int_0^t r_s ds \right), \quad t \in \mathbf{R}_+.$$

对于 $t > 0$ ，设 $(S_t)_{t \in [0, T]}$ 为价格过程，并定义为随机微分方程

$$dS_t = \mu_t S_t dt + \sigma_t S_t dB_t, \quad t \in \mathbf{R}_+,$$

即积分形式：

$$S_t = S_0 + \int_0^t \mu_u S_u du + \int_0^t \sigma_u S_u dB_u, \quad t \in \mathbf{R}_+,$$

有解

$$S_t = S_0 \exp \left(\int_0^t \sigma_u dB_u + \int_0^t \left(r_u - \frac{1}{2} \sigma_u^2 \right) du \right),$$

$t \in \mathbf{R}_+$, 参见练习 1.2.

设 η_t 和 ζ_t 为在时刻 t 分别投资于资产 $(S_t)_{t \in \mathbf{R}_+}$ 和 $(A_t)_{t \in \mathbf{R}_+}$ 的单位数。时刻 t 的投资组合的价值 V_t 为

$$V_t = \zeta_t A_t + \eta_t S_t, \quad t \in \mathbf{R}_+. \quad (2.2)$$

定义 2.1. 投资组合 V_t 被称为是自融资的，若

$$dV_t = \zeta_t dA_t + \eta_t dS_t. \quad (2.3)$$

注意到假设忽略了括号项 $d\langle S, \eta \rangle_t$ ，自融资条件 (2.3) 可写成

$$A_t d\zeta_t + S_t d\eta_t = 0, \quad 0 \leq t \leq T$$

§2.3 偏微分方程方法

在这个标准的Black–Scholes模型中可以构造出对冲欧式执行权的的投资组合策略。首先，注意到自融资条件(2.3)意味着

$$\begin{aligned} dV_t &= \zeta_t dA_t + \eta_t dS_t \\ &= r_t \zeta_t A_t dt + \mu_t \eta_t S_t dt + \sigma_t \eta_t S_t dB_t \\ &= r_t V_t dt + (\mu_t - r_t) \eta_t S_t dt + \sigma_t \eta_t S_t dB_t, \end{aligned} \quad (2.4)$$

$t \in \mathbf{R}_+$.

现在假设时刻 t 的投资组合价值 V_t 被写成函数 $C(t, x)$

$$V_t = C(t, S_t), \quad t \in \mathbf{R}_+.$$

应用伊藤公式(1.8)得到

$$\begin{aligned} dC(t, S_t) &= \left(\frac{\partial C}{\partial t} + \mu_t S_t \frac{\partial C}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} S_t^2 \sigma_t^2 \right) (t, S_t) dt \\ &\quad + \sigma_t S_t \frac{\partial C}{\partial x} (t, S_t) dB_t. \end{aligned} \quad (2.5)$$

因此，通过对比(2.4)和(2.5)确定 dB_t 和 dt 系数中的各项我们得到

$$\begin{cases} r_t C(t, S_t) = \left(\frac{\partial C}{\partial t} + r_t S_t \frac{\partial C}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma_t^2 S_t^2 \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \right) (t, S_t), \\ \eta_t S_t \sigma_t dB_t = S_t \sigma_t \frac{\partial C}{\partial x} (t, S_t) dB_t, \end{cases} \quad (2.6)$$

因此

$$\eta_t = \frac{\partial C}{\partial x} (t, S_t).$$

过程 $(\eta_t)_{t \in \mathbf{R}_+}$ 被称为德尔塔。除了计算Delta我们还在下一性质中推导了Black–Scholes偏微分方程 (PDE)。

命题 2.1. 在终端条件 $C(T, x) = (x - K)^+$ 下，欧式买入期权价格的Black–Scholes 偏微分方程写为

$$\frac{\partial C}{\partial t} (t, x) + r_t x \frac{\partial C}{\partial x} (t, x) + \frac{1}{2} x^2 \sigma_t^2 \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} (t, x) = r_t C(t, x).$$

该偏微分方程的解由 Black–Scholes 公式给出

$$C(t, x) = \mathbf{Bl}(K, x, \tilde{\sigma}_t, \tilde{r}_t, T - t) := x\Phi(d_1) - Ke^{-(T-t)\tilde{r}_t}\Phi(d_2), \quad (2.7)$$

其中

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-y^2/2} dy, \quad x \in \mathbf{R},$$

表示 Gauss 分布函数,

$$d_1 = \frac{\log(x/K) + (\tilde{r}_t + \tilde{\sigma}_t^2/2)(T-t)}{\tilde{\sigma}_t\sqrt{T-t}}, \quad d_2 = \frac{\log(x/K) + (\tilde{r}_t - \tilde{\sigma}_t^2/2)(T-t)}{\tilde{\sigma}_t\sqrt{T-t}},$$

且

$$\tilde{\sigma}_t^2 = \frac{1}{T-t} \int_t^T |\sigma(s)|^2 ds, \quad \tilde{r}_t = \frac{1}{T-t} \int_t^T r(s) ds.$$

关于这个专题更详细解释, 我们推荐参考[Mik98]和 [Øks03]。

§2.4 Girsanov 定理

在开始用鞅方法对期权定价之前, 我们要回顾一下 Girsanov 定理。让我们回到通过无穷小增量看 Brown 运动的粗略解释(1.1):

$$\Delta B_t = \pm\sqrt{dt},$$

且有

$$\mathbb{P}(\Delta B_t = +\sqrt{dt}) = \mathbb{P}(\Delta B_t = -\sqrt{dt}) = \frac{1}{2}.$$

显然, 给定 $\nu \in \mathbf{R}$, 漂移过程 $\nu t + B_t$ 不再是标准 Brown 运动因为它不是中心化的了:

$$\mathbb{E}[\nu t + B_t] = \nu t + \mathbb{E}[B_t] = \nu t \neq 0,$$

参见图 2.2. 这个特征可用无穷小增量表示为

$$\mathbb{E}[\nu dt + dB_t] = \frac{1}{2}(\nu dt + \sqrt{dt}) + \frac{1}{2}(\nu dt - \sqrt{dt}) = \nu dt \neq 0.$$



图 2.2: 漂移Brown运动的路径.

为了使 $\nu t + B_t$ 成为中心化的过程（即一个标准Brown运动），可以调整之前都被固定为 $1/2$ 的向上和向下漂移的概率，因为 $\nu t + B_t$ 保持了定义 1.1 中所有的其他性质 (1)- (3)。

也就是，现在的问题是找到两个数 $p, q \in [0, 1]$ 使得

$$\begin{cases} p(\nu dt + \sqrt{dt}) + q(\nu dt - \sqrt{dt}) = 0 \\ p + q = 1. \end{cases}$$

这个问题的解由下面给出

$$p = \frac{1}{2}(1 - \nu\sqrt{dt}) \quad \text{和} \quad q = \frac{1}{2}(1 + \nu\sqrt{dt}).$$

仍然将Brown运动看作是具有独立增量 $\pm\sqrt{dt}$ 的离散随机游动，相应的概率密度将通过把上述概率除以 $1/2^N$ 再连乘得到，也就是：

$$2^N \prod_{0 < t < T} \left(\frac{1}{2} \mp \frac{1}{2} \nu \sqrt{dt} \right)$$

其中 2^N 是标准化因子且 $N = T/dt$ 是（无穷大）离散时间间隔的数目。运用基本运算，这个密度可以粗略的看成为收敛于 如下：

$$\begin{aligned}
 2^N \prod_{0 < t < T} \left(\frac{1}{2} \mp \frac{1}{2} \nu \sqrt{dt} \right) &= \prod_{0 < t < T} \left(1 \mp \nu \sqrt{dt} \right) \\
 &= \exp \left(\log \prod_{0 < t < T} \left(1 \mp \nu \sqrt{dt} \right) \right) \\
 &= \exp \left(\sum_{0 < t < T} \log \left(1 \mp \nu \sqrt{dt} \right) \right) \\
 &\simeq \exp \left(\nu \sum_{0 < t < T} \mp \sqrt{dt} - \frac{1}{2} \sum_{0 < t < T} (\mp \nu \sqrt{dt})^2 \right) \\
 &= \exp \left(\nu \sum_{0 < t < T} \mp \sqrt{dt} - \frac{1}{2} \nu^2 \sum_{0 < t < T} dt \right) \\
 &= \exp \left(-\nu B_T - \frac{1}{2} \nu^2 T \right).
 \end{aligned}$$

Girsanov 定理可用一种更严格的方式重新描述如下。在此回顾， $\Omega = \mathcal{C}_0([0, T])$ 是 Winer 空间且 $\omega \in \Omega$ 是区间 $[0, T]$ 上在 $t = 0$ 时从 0 开始的连续函数。考虑概率 $\mathbb{Q}$ 定义为

$$d\mathbb{Q}(\omega) = \exp \left(-\nu B_T - \frac{1}{2} \nu^2 T \right) d\mathbb{P}(\omega).$$

则过程 $\nu t + B_t$ 是 $\mathbb{Q}$ 下的标准(中心)Brown 运动。

例如，在 $\mathbb{Q}$ 下 $\nu T + B_T$ 具有标准（中心）Gauss 分布可以如下得到：

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[f(\nu T + B_T)] &= \int_{\Omega} f(\nu T + B_T) d\mathbb{Q} \\
 &= \int_{\Omega} f(\nu T + B_T) \exp \left(-\nu B_T - \frac{1}{2} \nu^2 T \right) d\mathbb{P} \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\nu T + x) \exp \left(-\nu x - \frac{1}{2} \nu^2 T \right) e^{-x^2/(2T)} \frac{dx}{\sqrt{2\pi T}} \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-y^2/(2T)} \frac{dy}{\sqrt{2\pi T}} \\
 &= \int_{\Omega} f(B_T) d\mathbb{P}
 \end{aligned}$$

$$= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[f(B_T)].$$

Girsanov 定理实际上可以推广到如下适应过程, 参见[Pro05], 定理 III-42。

定理 2.1. 设 $(\psi_t)_{t \in [0, T]}$ 是一个满足 Novikov 可积条件

$$\mathbb{E} \left[\exp \left(\frac{1}{2} \int_0^T |\psi_t|^2 dt \right) \right] < \infty, \quad (2.8)$$

的适应过程且设 $\mathbb{Q}$ 是定义为

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = \exp \left(- \int_0^T \psi_t dB_t - \frac{1}{2} \int_0^T |\psi_t|^2 dt \right)$$

的概率测度。则

$$\hat{B}_t := B_t + \int_0^t \psi_s ds, \quad t \in [0, T],$$

是 $\mathbb{Q}$ 下的标准 Brown 运动。

§2.5 鞅方法

在这节中我们将给出用折扣损益期望来定价的 Black–Scholes 表达式。

定义 2.2. 一个市场被称为无套利的, 如果存在 (至少) 一个概率 $\mathbb{Q}$ 使得在该概率下折扣价格过程

$$\tilde{S}_t := \exp \left(- \int_0^t r_s ds \right) S_t, \quad t \in \mathbf{R}_+,$$

是 $\mathbb{Q}$ 下的鞅。

这样的概率 $\mathbb{Q}$ 通常被称为风险中性概率或者鞅测度。当鞅测度是唯一的, 这个市场就被称为完备的。我们现在将证明 Black–Scholes 模型具有唯一的鞅测度, 这表明了市场是无套利且完备的。

现在设 $(\psi_t)_{t \in [0, T]}$ 定义为

$$\psi_t := \frac{\nu_t - r_t}{\sigma_t}, \quad 0 \leq t \leq T,$$

且设 $\mathbb{Q}$ 表示定义如下的概率测度

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = \exp \left(- \int_0^T \psi_t dB_t - \frac{1}{2} \int_0^T |\psi_t|^2 dt \right).$$

由 Girsanov 定理我们知道

$$\hat{B}_t := B_t + \int_0^t \psi_s ds, \quad t \in [0, T],$$

是 $\mathbb{Q}$ 下的 Brown 运动。同时设

$$\tilde{V}_t = V_t \exp \left(- \int_0^t r_s ds \right), \quad \text{and} \quad \tilde{S}_t = S_t \exp \left(- \int_0^t r_s ds \right),$$

表示折扣投资组合和标底资产。

引理 2.1. 下面的说法是等价的:

i) 投资组合 V_t 是自融资的,

ii) 我们有

$$\tilde{V}_t = \tilde{V}_0 + \int_0^t \sigma_u \eta_u \tilde{S}_u d\hat{B}_u, \quad t \in \mathbf{R}_+, \quad (2.9)$$

iii) 我们有

$$V_t = V_0 \exp \left(\int_0^t r_u du \right) + \int_0^t \sigma_u \eta_u S_u \exp \left(\int_u^t r_s ds \right) d\hat{B}_u, \quad t \in \mathbf{R}_+. \quad (2.10)$$

证明. 首先, 注意到 (2.9) 显然等价于 (2.10)。现在, 自融资条件 (2.3) 表明

$$\begin{aligned} dV_t &= \zeta_t dA_t + \eta_t dS_t \\ &= \zeta_t A_t r_t dt + \eta_t r_t S_t dt + \sigma_t \eta_t S_t d\hat{B}_t \\ &= r_t V_t dt + \sigma_t \eta_t S_t d\hat{B}_t, \quad t \in \mathbf{R}_+, \end{aligned}$$

因此

$$d\tilde{V}_t = d \left(\exp \left(- \int_0^t r_s ds \right) V_t \right)$$

$$\begin{aligned}
 &= -r_t \exp\left(-\int_0^t r_s ds\right) V_t dt + \exp\left(-\int_0^t r_s ds\right) dV_t \\
 &= \exp\left(-\int_0^t r_s ds\right) \sigma_t \eta_t S_t d\hat{B}_t, \quad t \in \mathbf{R}_+,
 \end{aligned}$$

即 (2.9) 成立。相反地, 如果(2.9)成立我们有

$$\begin{aligned}
 dV_t &= d\left(\exp\left(\int_0^t r_s ds\right) \tilde{V}_t\right) \\
 &= r_t \exp\left(\int_0^t r_s ds\right) \tilde{V}_t dt + \exp\left(\int_0^t r_s ds\right) d\tilde{V}_t \\
 &= r_t \exp\left(\int_0^t r_s ds\right) \tilde{V}_t dt + \sigma_t \eta_t S_t d\hat{B}_t \\
 &= V_t r_t dt + \sigma_t \eta_t S_t d\hat{B}_t \\
 &= \zeta_t A_t r_t dt + \eta_t S_t r_t dt + \sigma_t \eta_t S_t d\hat{B}_t \\
 &= \zeta_t dA_t + \eta_t dS_t,
 \end{aligned}$$

因此投资组合是自融资的。 $\square$

在下一性质中我们计算一个自融资对冲策略使其最后价值为具有可料表达式

$$F = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[F] + \int_0^T \xi_t d\hat{B}_t \quad (2.11)$$

的任意平方可积随机变量 F , 其中 $(\xi_t)_{t \in [0, T]}$ 是平方可积适应过程。

命题 2.2. 给定 $F \in L^2(\Omega)$, 设

$$\eta_t = \frac{\exp\left(-\int_t^T r_s ds\right)}{\sigma_t S_t} \xi_t, \quad (2.12)$$

$$\zeta_t = \frac{\exp\left(-\int_t^T r_u du\right) \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[F|\mathcal{F}_t] - \eta_t S_t}{A_t}, \quad t \in [0, T]. \quad (2.13)$$

则投资组合 $(\eta_t, \zeta_t)_{t \in [0, T]}$ 是自融资的, 且设

$$V_t = \zeta_t A_t + \eta_t S_t, \quad t \in [0, T], \quad (2.14)$$

我们有

$$V_t = \exp\left(-\int_t^T r_u du\right) \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[F|\mathcal{F}_t], \quad 0 \leq t \leq T. \quad (2.15)$$

特别地我们有

$$V_T = F,$$

即由初始值

$$V_0 = \exp\left(-\int_0^T r_u du\right) \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[F]$$

开始, 投资组合构造了最终得到 F 的一个对冲策略。

证明. 在 $t = 0$, 应用(2.13) 和(2.14)我们得到

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[F] \exp\left(-\int_0^T r_u du\right) = \zeta_0 A_0 + \eta_0 S_0 = V_0,$$

因此再次从 (2.13), η_t 的定义(2.12) 和(2.11), 我们得到

$$\begin{aligned} V_t &= \zeta_t A_t + \eta_t S_t \\ &= \exp\left(-\int_t^T r_u du\right) \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[F|\mathcal{F}_t] \\ &= \exp\left(-\int_t^T r_u du\right) \left(\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[F] + \int_0^t \xi_u d\hat{B}_u\right) \\ &= V_0 \exp\left(\int_0^t r_u du\right) + \exp\left(-\int_t^T r_u du\right) \int_0^t \xi_u d\hat{B}_u \\ &= V_0 \exp\left(\int_0^t r_u du\right) + \int_0^t \eta_u \sigma_u S_u \exp\left(\int_u^t r_s ds\right) d\hat{B}_u, \quad 0 \leq t \leq T, \end{aligned}$$

且由引理 2.1 这同样意味着投资组合 $(\eta_t, \zeta_t)_{t \in [0, T]}$ 是自融资的。 $\square$

上述性质表明总是存在一个从

$$V_0 = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[F] \exp\left(-\int_0^T r_u du\right)$$

开始的对冲策略。除此之外, 由于存在一个对冲策略得到

$$\tilde{V}_T = F \exp\left(-\int_0^T r_u du\right),$$

则由(2.9), $(\tilde{V}_t)_{t \in [0, T]}$ 必然是一个鞅且有

$$\tilde{V}_t = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\tilde{V}_T|\mathcal{F}_t] = \exp\left(-\int_0^T r_u du\right) \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[F|\mathcal{F}_t], \quad 0 \leq t \leq T,$$

和初始值

$$\tilde{V}_0 = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\tilde{V}_T] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[F] \exp \left(- \int_0^T r_u du \right).$$

实际上，对冲问题现在退化为计算在(2.11)中出现的过程 $(\xi_t)_{t \in [0, T]}$ 。这个被称为德尔塔对冲的计算可通过伊藤公式的运用和马氏性展开，见 [Pro01]。考虑关于 $(S_t)_{t \in [0, T]}$ 的（非齐次）半群 $(P_{s,t})_{0 \leq s \leq t \leq T}$ 其被定义为

$$\begin{aligned} P_{s,t}f(S_s) &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[f(S_t) \mid S_s] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[f(S_t) \mid \mathcal{F}_s], \quad 0 \leq s \leq t \leq T, \end{aligned}$$

它作用于 $\mathcal{C}_b^2(\mathbf{R}^n)$ 函数上，且有

$$P_{s,t}P_{t,u} = P_{s,u}, \quad 0 \leq s \leq t \leq u \leq T.$$

注意到 $(P_{t,T}f(S_t))_{t \in [0, T]}$ 是一个 $\mathcal{F}_t$ -鞅，即：

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[P_{t,T}f(S_t) \mid \mathcal{F}_s] &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[f(S_T) \mid \mathcal{F}_t] \mid \mathcal{F}_s] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[f(S_T) \mid \mathcal{F}_s] \\ &= P_{s,T}f(S_s), \end{aligned} \tag{2.16}$$

$0 \leq s \leq t \leq T$. 下面的引理使得我们能够计算在 对于任意函数 ϕ 损益 F 具有形式 $F = \phi(S_T)$ 情形下的过程 $(\xi_t)_{t \in [0, T]}$ 。

引理 2.2. 设 $\phi \in \mathcal{C}_b^2(\mathbf{R}^n)$ 。可料表达

$$\phi(S_T) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\phi(S_T)] + \int_0^T \xi_t d\hat{B}_t \tag{2.17}$$

由

$$\xi_t = \sigma_t S_t \frac{\partial}{\partial x} (P_{t,T}\phi)(S_t), \quad 0 \leq t \leq T \tag{2.18}$$

给出。

证明. 由于 $P_{t,T}\phi$ 属于 $\mathcal{C}^2(\mathbf{R})$ ，我们将伊藤公式 (1.8) 应用于

$$t \mapsto P_{t,T}\phi(S_t) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\phi(S_T) \mid \mathcal{F}_t], \tag{2.19}$$

由(2.16)这就是一个鞅，也可参见附录 A。由当 $(P_{t,T}\phi(S_t))_{t \in [0, T]}$ 是鞅时伊藤公式中的有限变差项就消失的事实（见引理 1, [Pro05]的 72页），我们得到：

$$P_{t,T}\phi(S_t) = P_{0,T}\phi(S_0) + \int_0^t \sigma_s S_s \frac{\partial}{\partial x}(P_{s,T}\phi)(S_s) d\hat{B}_s, \quad t \in [0, T], \quad (2.20)$$

且有 $P_{0,T}\phi(S_0) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\phi(S_T)]$ 。设 $t = T$ ，我们由 $F = \phi(S_T)$ 的可料表达(2.17)的一致性得到(2.18)。□

现在设 $(S_{t,s}^x)_{s \in [t, \infty)}$ 是价格过程的随机微分方程的解

$$\frac{dS_{t,s}^x}{S_{t,s}^x} = r_s ds + \sigma_s d\hat{B}_s, \quad s \in [t, \infty),$$

且有初始条件 $S_{t,t}^x = x \in (0, \infty)$ 。

投资组合在时刻 $t \in [0, T]$ 的价值 V_t 可通过(2.15)计算

$$\begin{aligned} V_t &= \exp\left(-\int_t^T r_u du\right) \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\phi(S_T) | \mathcal{F}_t] \\ &= C(t, S_t), \end{aligned}$$

其中由附件 A 的关系式 (11.4) 有

$$\begin{aligned} C(t, x) &= e^{-(T-t)\tilde{r}_t} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\phi(S_T) | S_t = x] \\ &= e^{-(T-t)\tilde{r}_t} P_{t,T}\phi(x) \\ &= e^{-(T-t)\tilde{r}_t} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\phi(S_{t,T}^x)], \end{aligned}$$

$0 \leq t \leq T$ 。再次，由(2.20)中有限变差项消失的事实我们重新得到 $C(t, x)$ 是 Black-Scholes 随机微分方程的解：

$$\begin{cases} \frac{\partial C}{\partial t}(t, x) + \frac{1}{2}x^2\sigma^2(t)\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}(t, x) + xr(t)\frac{\partial C}{\partial x}(t, x) = r(t)C(t, x), \\ C(T, x) = \phi(x). \end{cases}$$

作为 (2.15) 和下面引理的一个结果，在欧式期权具有损益函数 $\phi(x) = (x - K)^+$ 的情形我们得到关系式 (2.7)，即

$$C(t, x) = \mathbf{BI}(K, x, \tilde{\sigma}_t, \tilde{r}_t, T - t).$$

引理 2.3. 设 X 是方差为 v^2 中心 *Gauss* 随机变量。我们有

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[(e^{m+X} - K)^+] = e^{m+v^2/2} \Phi(v + (m - \log K)/v) - K \Phi((m - \log K)/v).$$

证明. 我们有

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[(e^{m+X} - K)^+] &= \int_{-\infty}^{\infty} (e^{m+x} - K)^+ e^{-x^2/(2v^2)} \frac{dx}{\sqrt{2\pi v^2}} \\ &= \int_{-m+\log K}^{\infty} (e^{m+x} - K) e^{-x^2/(2v^2)} \frac{dx}{\sqrt{2\pi v^2}} \\ &= e^m \int_{-m+\log K}^{\infty} e^{x-x^2/(2v^2)} \frac{dx}{\sqrt{2\pi v^2}} - K \int_{-m+\log K}^{\infty} e^{-x^2/(2v^2)} \frac{dx}{\sqrt{2\pi v^2}} \\ &= e^{m+v^2/2} \int_{-m+\log K}^{\infty} e^{-(v^2-x)^2/(2v^2)} \frac{dx}{\sqrt{2\pi v^2}} - K \int_{(-m+\log K)/v}^{\infty} e^{-x^2/2} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \\ &= e^{m+v^2/2} \int_{-v^2-m+\log K}^{\infty} e^{-x^2/(2v^2)} \frac{dx}{\sqrt{2\pi v^2}} - K \Phi((m - \log K)/v) \\ &= e^{m+v^2/2} \Phi(v + (m - \log K)/v) - K \Phi((m - \log K)/v). \end{aligned}$$

□

更进一步，仍然是欧式期权的情形，过程 $(\xi)_{t \in [0, T]}$ 可通过下一个性质计算出来。

命题 2.3. 假设 $F = (S_T - K)^+$ 。则对 $0 \leq t \leq T$ 我们有

$$\xi_t = \sigma_t \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} [S_{t,T}^x \mathbf{1}_{[K, \infty[}(S_{t,T}^x)]_{x=S_t}.$$

证明. 在用 C^2 函数的渐近 $x \mapsto (x - K)^+$ 后，由引理 2.2 和关系式 $P_{t,T} f(x) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[f(S_{t,T}^x)]$ 可得该性质的结果。□

由上述性质我们得到 Black-Scholes 模型中欧式买入期权的德尔塔公式。

命题 2.4. 损益为 $F = (S_T - K)^+$ 的欧式买入期权的德尔塔公式为

$$\eta_t = \Phi \left(\frac{\log(S_t/K) + (\tilde{r}_t + \tilde{\sigma}_t^2/2)(T-t)}{\tilde{\sigma}_t \sqrt{T-t}} \right), \quad 0 \leq t \leq T.$$

证明. 取 $x = S_t$ 我们有

$$\begin{aligned}
 \eta_t &= \frac{1}{\sigma_t S_t} e^{-\tilde{r}_t(T-t)} \xi_t \\
 &= e^{-\tilde{r}_t(T-t)} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\frac{S_{t,T}^x}{x} \mathbf{1}_{[K, \infty[}(S_{t,T}^x) \right] \\
 &= e^{-\tilde{r}_t(T-t)} \\
 &\quad \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[e^{\tilde{\sigma}_t \hat{B}_{T-t} - \tilde{\sigma}_t^2(T-t)/2 + \tilde{r}_t(T-t)} \mathbf{1}_{[K, \infty[}(x e^{\tilde{\sigma}_t \hat{B}_{T-t} - \tilde{\sigma}_t^2(T-t)/2 + \tilde{r}_t(T-t)}) \right] \\
 &= \frac{e^{-\tilde{r}_t(T-t)}}{\sqrt{2\pi(T-t)}} \\
 &\quad \int_{\tilde{\sigma}_t(T-t)/2 - \tilde{r}_t(T-t)/\tilde{\sigma}_t + \frac{1}{\tilde{\sigma}_t} \log \frac{K}{x}}^{\infty} e^{\tilde{\sigma}_t y - \tilde{\sigma}_t^2(T-t)/2 + \tilde{r}_t(T-t)} e^{-y^2/(2(T-t))} dy \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t)}} \int_{-d_-/\sqrt{T-t}}^{\infty} e^{-\frac{1}{2(T-t)}(y - \tilde{\sigma}_t(T-t))^2} dy \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t)}} \int_{-d_-/\sqrt{T-t}}^{\infty} e^{-\frac{1}{2(T-t)}(y - \tilde{\sigma}_t(T-t))^2} dy \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-d_+}^{\infty} e^{-y^2/2} dy \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d_+} e^{-y^2/2} dy \\
 &= \Phi(d_+).
 \end{aligned}$$

□

§2.6 练习

练习 2.1. 考虑价格过程 $(S_t)_{t \in [0, T]}$ 满足

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dB_t$$

和一个无风险资产其价值为 $A_t = A_0 e^{rt}$, $t \in [0, T]$, 其中 $r > 0$. 设一个自融资投资组合 $(\zeta_t, \eta_t)_{t \in [0, T]}$ 价值为

$$V_t = \eta_t A_t + \zeta_t S_t, \quad t \in [0, T].$$

1. 用Girsanov定理, 构造一个概率测度 $\mathbb{Q}$, 使得在该测度下过程 $\tilde{S}_t := S_t/A_t$, $t \in [0, T]$ 是一个 $\mathcal{F}_t$ 鞅。

2. 计算时刻 $t \in [0, T]$ 的损益为 $|S_T|^2$ 的未定权益的无套利价格

$$C(t, S_t) = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[|S_T|^2 | \mathcal{F}_t].$$

3. 计算对冲未定权益 $|S_T|^2$ 的投资组合策略 $(\zeta_t, \eta_t)_{t \in [0, T]}$.

4. 给定 $T_0 \in [0, T]$, 计算在时刻 $t \in [0, T]$ 的损益为 S_T/S_{T_0} 的未定权益的无套利价格

$$C(t, S_t) = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\frac{S_T}{S_{T_0}} \mid \mathcal{F}_t \right].$$

提示: 分别考虑 $t \in [0, T_0]$ 和 $t \in (T_0, T]$ 的两种情况。

5. 计算对冲未定权益 S_T/S_{T_0} 的投资组合策略 $(\zeta_t, \eta_t)_{t \in [0, T]}$. 证明这个投资策略是自融资的.

练习 2.2.

1. 在 $\alpha, \sigma > 0$ 和初始条件 S_0 下求解随机微分方程

$$dS_t = \alpha S_t dt + \sigma dB_t. \quad (2.21)$$

2. α 的什么值 α_M 使得折扣价格过程 $\tilde{S}_t = e^{-rt} S_t$, $t \in [0, T]$, 成为 P 下的鞅?
3. 计算在时刻 $t \in [0, T]$ 的未定权益 $\exp(S_T)$, 其中 $\alpha = \alpha_M$ 的无套利价格 $C(t, S_t) = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}[\exp(S_T) | \mathcal{F}_t]$.
4. 显式计算出对冲未定权益 $\exp(S_T)$ 的策略 $(\zeta_t, \eta_t)_{t \in [0, T]}$.

练习 2.3.

1. 求出用 $\alpha, \sigma > 0$ 和初始条件 S_0 表示的随机微分方程

$$dS_t = \alpha S_t dt + \sigma dB_t \quad (2.22)$$

的解。

2. 当 α 取什么值 α_M 时折扣价格过程 $\tilde{S}_t = e^{-rt} S_t$, $t \in [0, T]$ 是 P 下的鞅?
3. 计算当 $\alpha = \alpha_M$ 时, 在时刻 $t \in [0, T]$ 时的未定权益 $\exp(S_T)$ 的套利价格 $C(t, S_t) = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}[\exp(S_T) | \mathcal{F}_t]$.
4. 计算出对冲未定权益 $\exp(S_T)$ 的投资策略 $(\zeta_t, \eta_t)_{t \in [0, T]}$ 的精确表达式。

第三章 短期利率模型

本章是关于一些基本短期利率模型的一个简短介绍。在此我们将不完整地叙述 因为这些模型在以下的文献中已被广泛讨论, 详见 [BM06], [CT06], [JW01], [Kij03], [Reb96], [Yol05]. 在下一章我们将主要以Vasicek均值回归模型为例, 因为该模型能显式计算出来。

§3.1 均值回归模型

利率的变化不同于股票价格, 需要发展特殊的模型来表现其特性, 如正值性、无界性和均值回归。

[Vas77]介绍了第一个表现利率的均值回归性质的模型, 而几何Brown运动是不具有均值回归性的。在Vasicek模型中, 基于Ornstein–Uhlenbeck 过程短期利率过程 $(r_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ 满足方程

$$dr_t = \beta(\alpha - r_t)dt + \sigma dB_t,$$

其中 $(B_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ 是一个标准Brown运动。这个模型有一个人们感兴趣的性质, 它是关于时间统计平稳的, 即 $r_t - r_s$ 的分布只依赖于时间差 $t - s$, 而它的缺点是允许 r_t 取负值。Vasicek模型的显式表达式在 下面的练习 1.3 和练习 3.1 给出。

Cox–Ingersoll–Ross (CIR) [CIR85] 模型通过用非线性方程

$$dr_t = \beta(\alpha - r_t)dt + r_t^{1/2}\sigma dB_t$$

来解决Vasicek模型中不能保证利率恒取正值的问题, 该非线性方程及其解的性质在下面的练习 3.2 中讨论。

其他的均值回归模型包括Courtadon (1982)模型

$$dr_t = \beta(\alpha - r_t)dt + \sigma r_t dB_t$$

其中 α, β, σ 是非负的, 和指数Vasicek模型

$$dr_t = r_t(\eta - a \log r_t)dt + \sigma r_t dB_t,$$

其中 a, η, σ 是非负的, 这个模型将在 本章的练习 3.1 中被讨论。

更近些, 利用随机微分方程人们提出了保持利率恒为正值的其他模型, 参阅[JW01]。

§3.2 常数方差弹性 (CEV) 模型

常数方差弹性模型是为考虑随着标的资产乘方变化的非常数波动率而设计的。Marsh–Rosenfeld (1983)模型

$$dr_t = (\beta r_t^{-(1-\gamma)} + \alpha r_t)dt + \sigma r_t^{\gamma/2} dB_t$$

其中 $\alpha, \beta, \sigma, \gamma$ 是非负常数, 包含了大多数的CEV模型。特别地, 当 $\beta = 0$ 我们得到标准的CEV模型

$$dr_t = \alpha r_t dt + \sigma r_t^{\gamma/2} dB_t,$$

且如果 $\gamma = 2$ 就可得到了Dothan [Dot78], [PP11] 模型

$$dr_t = \alpha r_t dt + \sigma r_t dB_t.$$

§3.3 时间相依模型

在上一节中讨论的大部分模型都可以进行时间相依推广, 其中最基本的例子就是 Ho–Lee 模型

$$dr_t = \theta(t)dt + \sigma dB_t,$$

其中 $\theta(t)$ 是关于时间的一个确定函数, 这个模型将在练习 4.1中被应用。

Hull–White 模型

$$dr_t = (\theta(t) - \alpha(t)r_t)dt + \sigma(t)dB_t$$

是Vasicek模型的一个时间相依推广且在 §6.6节中将被涉及到。CIR模型也可以进行类似的时间相依推广。

并且这些时间相依模型在练习 8.2-(8) 中将被用来拟合无套利条件下的远期瞬时利率的初始曲线。

短期利率模型族可进行多种推广，关于这些推广模型我们推荐参阅本章介绍中引用的参考文献，其中具有如下形式

$$dr_t = (\eta(t) + \lambda(t)r_t)dt + \sqrt{\delta(t) + \gamma(t)r_t}dB_t \quad (3.1)$$

的一族精细模型对于债券定价有特殊的性质，参见 4章 §4.4节的结尾部分。

§3.4 练习

练习 3.1. 指数Vasicek模型。考虑短期利率过程 $(r_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ ，它服从指数Vasicek 模型：

$$dr_t = r_t(\eta - a \log r_t)dt + \sigma r_t dB_t, \quad (3.2)$$

其中 η, a, σ 是正参数。

1. 求出随机微分方程

$$dY_t = (\theta - aY_t)dt + \sigma dB_t \quad (3.3)$$

的解 $(Y_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ ，它是初始条件 y_0 的一个函数，其中 θ, a, σ 是正参数。提

示：设 $Z_t = Y_t - \theta/a, t \in \mathbb{R}_+$ 。

2. 设 $X_t = e^{Y_t}, t \in \mathbb{R}_+$ 。确定 $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ 所满足的随机微分方程。
3. 求出用初始条件 r_0 表示的(3.2)的解 $(r_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ 。
4. 计算 $r_t, 0 \leq u \leq t$ 的条件均值 $\mathbb{E}[r_t | \mathcal{F}_u]$ ，其中 $(\mathcal{F}_u)_{u \in \mathbb{R}_+}$ 表示由Brown运动 $(B_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ 生成的信息流。

5. 计算的 r_t 的条件方差 $\mathbb{V}ar[r_t|\mathcal{F}_u] := \mathbb{E}[r_t^2|\mathcal{F}_u] - (\mathbb{E}[r_t|\mathcal{F}_u])^2$, $0 \leq u \leq t$ 。

6. 计算均值和方差的极限 $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}[r_t]$ 和 $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{V}ar[r_t]$ 。

练习 3.2. Cox-Ingerson-Ross 模型。考虑方程

$$dr_t = (\alpha - \beta r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}dB_t \quad (3.4)$$

它表示短期利率过程 r_t 的变化, 其中 α, β, σ 和 r_0 是正参数。

1. 写下方程 (3.4) 的积分形式。

2. 设 $u(t) = \mathbb{E}[r_t]$. 利用 (3.4) 的积分形式, 证明 $u(t)$ 满足微分方程

$$u'(t) = \alpha - \beta u(t).$$

3. 通过运用关于 r_t^2 的伊藤公式, 证明

$$dr_t^2 = r_t(2\alpha + \sigma^2 - 2\beta r_t)dt + 2\sigma r_t^{3/2}dB_t. \quad (3.5)$$

4. 利用 (3.5) 的积分形式, 求出 $v(t) = \mathbb{E}[r_t^2|\mathcal{F}_s]$, $0 \leq s \leq t$ 所满足的微分方程, 并计算 $\mathbb{E}[r_t^2|\mathcal{F}_s]$, $0 \leq s \leq t$ 。为了计算的简便, 可假设 $\alpha = 0$ 。

提示. 对所有的 $c \in \mathbb{R}$, 函数 $f(t) = ce^{-\beta t}/\beta$ 是微分方程 $f'(t) + 2\beta f(t) = ce^{-\beta t}$ 的解。

5. 设

$$X_t = e^{-\beta t/2} \left(x_0 + \frac{\sigma}{2} \int_0^t e^{\beta s/2} dB_s \right), \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

证明 X_t 满足方程

$$dX_t = \frac{\sigma}{2} dB_t - \frac{\beta}{2} X_t dt.$$

6. 设 $R_t = X_t^2$ 且

$$W_t = \int_0^t \text{sign}(X_s) dB_s,$$

其中 $\text{sign}(x) = 1_{\{x \geq 0\}} - 1_{\{x < 0\}}$, $x \in \mathbb{R}$. 证明

$$dR_t = \left(\frac{\sigma^2}{4} - \beta R_t \right) dt + \sigma \sqrt{R_t} dW_t.$$

第四章 零息债券的定价

本章中我们介绍无套利机会下的债券定价基础。运用概率和微积分方程方法，我们在 Vasicek 模型下展开精确计算。零息债券的定义在 5 章中将被用于构造 远期利率过程。

§4.1 定义和基本性质

一个零息债券是在时刻 $t < T$ 时价格为 $P(t, T)$ 而在时刻 T 时获得价值 $P(T, T) = 1$ 的合同。计算零息债券基于标的短期利率过程 $(r_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ 的套利价格 $P(t, T)$ 是利率建模既基础又重要的环节。

我们要区别以下三种不同的情形：

- a) 短期利率是确定的常数 $r > 0$.

在这种情况下， $P(t, T)$ 要满足方程

$$e^{r(T-t)} P(t, T) = P(T, T) = 1,$$

这就得到

$$P(t, T) = e^{-r(T-t)}, \quad 0 \leq t \leq T.$$

- b) 短期利率是时间相依的且为确定的函数 $(r_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$.

在这种情况下，和上面的讨论类似地可以得到

$$P(t, T) = e^{-\int_t^T r_s ds}, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (4.1)$$

- c) 短期利率是随机过程 $(r_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$.

在这种情况下，公式(4.1)不再有意义因为在时刻 t 确定的价格 $P(t, T)$ 仅取决于到时刻 t 为止的信息。这不与公式 (4.1) 中 $P(t, T)$ 取决于未来时

刻 $s \in [t, T]$ 的短期利率 r_s 正好相反。

在本章剩余的篇幅里我们关注随机情形 (c)。债券 $P(t, T)$ 的定价遵循之前 Black-Scholes 定价用过的以下几个步骤。

§4.2 无套利和马氏性

有了之前在性质 2.2 中关于 Black-Scholes 定价的经验，很自然地将 $P(t, T)$ 写成鞅测度下的条件期望。另一方面考虑到上面提到的 (c) 条，在这个框架下条件期望的使用也显得很自然，因为这样能帮助我们包含在 (4.1) 中过了时刻 t 之后的未来信息“过滤出来”。因此我们假设在某个待定的鞅(也被称为风险中性)测度 $\mathbb{Q}$ 下，

$$P(t, T) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_t^T r_s ds} \mid \mathcal{F}_t \right]. \quad (4.2)$$

表达式 (4.2) 有理由成为在已知到时刻 t 为止的信息的条件下 $e^{-\int_t^T r_s ds}$ 的将来取值的“最优估计”。

从现在开始假设标的的短期利率过程是以下随机微分方程的解

$$dr_t = \mu(t, r_t)dt + \sigma(t, r_t)dB_t \quad (4.3)$$

其中 $(B_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ 是测度 $\mathbb{P}$ 下的标准 Brown 运动。例如回顾 Vasicek 模型，我们有

$$\mu(t, x) = a - bx \quad \text{和} \quad \sigma(t, x) = \sigma.$$

考虑一个等价于 $\mathbb{P}$ 的概率测度 $\mathbb{Q}$ 并给出其密度为

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = e^{-\int_0^\infty K_s dB_s - \frac{1}{2} \int_0^\infty |K_s|^2 ds},$$

其中 $(K_s)_{s \in \mathbb{R}_+}$ 是满足 Nivikov 可积性条件 (2.8) 的适应过程。由 Girsanov 定理 2.1 可知

$$\hat{B}_t := B_t + \int_0^t K_s ds$$

是 $\mathbb{Q}$ 下的标准Brown 运动，因此 (4.3)可改写为

$$dr_t = \tilde{\mu}(t, r_t)dt + \sigma(t, r_t)d\hat{B}_t$$

其中

$$\tilde{\mu}(t, r_t) := \mu(t, r_t) - \sigma(t, r_t)K_t.$$

一般基于市场数据通过统计估计，被称为“风险的市场价格”的过程 K_t 要被确定下来。

今后为了方便我们将假设 $K_t = 0$ ；另一方面我们假设 $\mathbb{P}$ 是在这个市场中所使用的鞅测度。

马氏性表明马氏过程 $(X_s)_{s \in \mathbb{R}_+}$ 在时刻 t 之后的未来状态仅取决于其在时刻 t 的状态而不依赖于时刻 t 之前的任何历史状态。这可以用条件期望描述成：对所有大于 t 的时刻 $t_1, \dots, t_n$ 和 $\mathbb{R}^n$ 上所有充分可积函数 f ,

$$\mathbb{E}[f(X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) \mid \mathcal{F}_t] = \mathbb{E}[f(X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) \mid X_t]$$

详情请参阅附录 A。

我们将用到下面的基本性质，参见文献[Pro05]的定理 V-32。

性质 4.1. 形如(4.3)的随机微分方程的所有解都具有马氏性。

由此得到，套利价格 $P(t, T)$ 满足

$$\begin{aligned} P(t, T) &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_t^T r_s ds} \mid \mathcal{F}_t \right] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_t^T r_s ds} \mid r_t \right], \end{aligned}$$

且依赖于 r_t 的条件仅代替了到时刻 t 为止的已有信息 $\mathcal{F}_t$ 的条件。这样，它就成了关于 r_t 的一个函数 $F(t, r_t)$:

$$P(t, T) = F(t, r_t),$$

这意味着定价问题现在被公式化为寻找函数 $F(t, x)$ 。

§4.3 无套利和鞅性

现在我们的目标是对 $F(t, r_t) = P(t, T)$ 应用 Itô 算子来推导满足 $F(t, x)$ 的偏微分方程。由 Itô 公式定理 1.8 我们有

$$\begin{aligned}
d\left(e^{-\int_0^t r_s ds} P(t, T)\right) &= -r_t e^{-\int_0^t r_s ds} P(t, T) dt + e^{-\int_0^t r_s ds} dP(t, T) \\
&= -r_t e^{-\int_0^t r_s ds} F(t, r_t) dt + e^{-\int_0^t r_s ds} dF(t, r_t) \\
&= -r_t e^{-\int_0^t r_s ds} F(t, r_t) dt + e^{-\int_0^t r_s ds} \frac{\partial F}{\partial x}(t, r_t) (\tilde{\mu}(t, r_t) dt + \sigma(t, r_t) d\hat{B}_t) \\
&\quad + e^{-\int_0^t r_s ds} \left(\frac{1}{2} \sigma^2(t, r_t) \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t, r_t) dt + \frac{\partial F}{\partial t}(t, r_t) dt \right) \\
&= e^{-\int_0^t r_s ds} \sigma(t, r_t) \frac{\partial F}{\partial x}(t, r_t) d\hat{B}_t \\
&\quad + e^{-\int_0^t r_s ds} \left(-r_t F(t, r_t) + \tilde{\mu}(t, r_t) \frac{\partial F}{\partial x}(t, r_t) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \sigma^2(t, r_t) \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t, r_t) + \frac{\partial F}{\partial t}(t, r_t) \right) dt.
\end{aligned} \tag{4.4}$$

下面，注意到我们有

$$\begin{aligned}
e^{-\int_0^t r_s ds} P(t, T) &= e^{-\int_0^t r_s ds} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_t^T r_s ds} \mid \mathcal{F}_t \right] \\
&= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_0^t r_s ds} e^{-\int_t^T r_s ds} \mid \mathcal{F}_t \right] \\
&= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_0^T r_s ds} \mid \mathcal{F}_t \right]
\end{aligned}$$

因此

$$t \mapsto e^{-\int_0^t r_s ds} P(t, T)$$

是一个鞅（参阅附录 A）因为对任意的 $0 < u < t$ 我们有：

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_0^t r_s ds} P(t, T) \mid \mathcal{F}_u \right] &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_0^T r_s ds} \mid \mathcal{F}_t \right] \mid \mathcal{F}_u \right] \\
&= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_0^T r_s ds} \mid \mathcal{F}_u \right] \\
&= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_0^u r_s ds} e^{-\int_u^T r_s ds} \mid \mathcal{F}_u \right] \\
&= e^{-\int_0^u r_s ds} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_u^T r_s ds} \mid \mathcal{F}_u \right]
\end{aligned}$$

$$= e^{-\int_0^u r_s ds} P(u, t).$$

由此可知, (再次参考[Pro05] 72页的引理 1) 上面的表达式

$$d\left(e^{-\int_0^t r_s ds} P(t, T)\right)$$

应该只包含 $d\hat{B}_t$ 的各项, 这意味着在(4.4)中 dt 的所有项都应该消失。由此可得等式

$$-r_t F(t, r_t) + \tilde{\mu}(t, r_t) \frac{\partial F}{\partial x}(t, r_t) + \frac{1}{2} \sigma^2(t, r_t) \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t, r_t) + \frac{\partial F}{\partial t}(t, r_t) = 0,$$

这可以在下一个性质中重新描述。

命题 4.1. $P(t, T) = F(t, r_t)$ 的债券定价偏微分方程可被改写为

$$xF(t, x) = \tilde{\mu}(t, x) \frac{\partial F}{\partial x}(t, x) + \frac{1}{2} \sigma^2(t, x) \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t, x) + \frac{\partial F}{\partial t}(t, x), \quad (4.5)$$

服从终端条件

$$F(T, x) = 1. \quad (4.6)$$

条件 (4.6)是由于 $P(T, T) = 1\$$. 另一方面,

$$\left(e^{-\int_0^t r_s ds} P(t, T)\right)_{t \in [0, T]} \quad \text{和} \quad (P(t, T))_{t \in [0, T]}$$

分布满足随机微分方程

$$d\left(e^{-\int_0^t r_s ds} P(t, T)\right) = e^{-\int_0^t r_s ds} \sigma(t, r_t) \frac{\partial F}{\partial x}(t, r_t) d\hat{B}_t$$

和

$$dP(t, T) = P(t, T) r_t dt + \sigma(t, r_t) \frac{\partial F}{\partial x}(t, r_t) d\hat{B}_t,$$

即

$$\begin{aligned} \frac{dP(t, T)}{P(t, T)} &= r_t dt + \frac{\sigma(t, r_t)}{P(t, T)} \frac{\partial F}{\partial x}(t, r_t) d\hat{B}_t \\ &= r_t dt + \sigma(t, r_t) \frac{\partial \log F}{\partial x}(t, r_t) d\hat{B}_t. \end{aligned}$$

§4.4 偏微分方程的解：概率方法

我们的目标现在是解偏微分方程 (4.5) 通过直接计算条件期望

$$P(t, T) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_t^T r_s ds} \mid \mathcal{F}_t \right]. \quad (4.7)$$

我们将假设短期利率 $(r_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ 可表示成

$$r_t = g(t) + \int_0^t h(t, s) dB_s,$$

其中 $g(t)$ 和 $h(t, s)$ 是确定的函数，这是[Vaš77]模型中的一个特例。令 $u \vee t = \max(u, t)$ ，由Wiener积分是Gauss随机变量的事实（性质 1.3）和Gauss特征函数 (11.1)以及条件期望的性质 (a)，参阅附录 A，我们有

$$\begin{aligned} P(t, T) &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_t^T r_s ds} \mid \mathcal{F}_t \right] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_t^T (g(s) + \int_0^s h(s, u) dB_u) ds} \mid \mathcal{F}_t \right] \\ &= e^{-\int_t^T g(s) ds} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_t^T \int_0^s h(s, u) dB_u ds} \mid \mathcal{F}_t \right] \\ &= e^{-\int_t^T g(s) ds} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_0^T \int_{u \vee t}^T h(s, u) ds dB_u} \mid \mathcal{F}_t \right] \\ &= e^{-\int_t^T g(s) ds} e^{-\int_0^t \int_{u \vee t}^T h(s, u) ds dB_u} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_t^T \int_{u \vee t}^T h(s, u) ds dB_u} \mid \mathcal{F}_t \right] \\ &= e^{-\int_t^T g(s) ds} e^{-\int_0^t \int_t^T h(s, u) ds dB_u} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_t^T \int_u^T h(s, u) ds dB_u} \mid \mathcal{F}_t \right] \\ &= e^{-\int_t^T g(s) ds} e^{-\int_0^t \int_t^T h(s, u) ds dB_u} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_t^T \int_u^T h(s, u) ds dB_u} \right] \\ &= e^{-\int_t^T g(s) ds} e^{-\int_0^t \int_t^T h(s, u) ds dB_u} e^{\frac{1}{2} \int_t^T \left(\int_u^T h(s, u) ds \right)^2 du}. \end{aligned}$$

回顾在[Vaš77]模型中，即短期利率是以下方程的解

$$dr_t = (a - br_t)dt + \sigma dB_t,$$

且风险的市场价格为 $K_t = 0$ ，我们得到显式解，参考练习 1.3和练习 3.1:

$$r_t = r_0 e^{-bt} + \frac{a}{b}(1 - e^{-bt}) + \sigma \int_0^t e^{-b(t-s)} dB_s, \quad (4.8)$$

因此由上述计算可得

$$P(t, T) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_t^T r_s ds} \mid \mathcal{F}_t \right]$$

$$\begin{aligned}
 &= e^{-\int_t^T (r_0 e^{-bs} + \frac{a}{b}(1-e^{-bs}))ds} e^{-\sigma \int_0^t \int_t^T e^{-b(s-u)} ds dB_u} \\
 &\quad \times e^{\sigma^2/2 \int_t^T \left(\int_u^T e^{-b(s-u)} ds \right)^2 du} \\
 &= e^{-\int_t^T (r_0 e^{-bs} + \frac{a}{b}(1-e^{-bs}))ds} e^{-\frac{\sigma}{b}(1-e^{-b(T-t)}) \int_0^t e^{-b(t-u)} dB_u} \\
 &\quad \times e^{\frac{\sigma^2}{2} \int_t^T e^{2bu} \left(\frac{e^{-bu} - e^{-bT}}{b} \right)^2 du} \\
 &= e^{-\frac{r_t}{b}(1-e^{-b(T-t)}) + \frac{1}{b}(1-e^{-b(T-t)})(r_0 e^{-bt} + \frac{a}{b}(1-e^{-bt}))} \\
 &\quad \times e^{-\int_t^T (r_0 e^{-bs} + \frac{a}{b}(1-e^{-bs}))ds + \frac{\sigma^2}{2} \int_t^T e^{2bu} \left(\frac{e^{-bu} - e^{-bT}}{b} \right)^2 du} \\
 &= e^{C(T-t)r_t + A(T-t)},
 \end{aligned}$$

其中

$$C(T-t) = -\frac{1}{b}(1 - e^{-b(T-t)}),$$

且

$$\begin{aligned}
 A(T-t) &= \frac{1}{b}(1 - e^{-b(T-t)})(r_0 e^{-bt} + \frac{a}{b}(1 - e^{-bt})) \\
 &\quad - \int_t^T (r_0 e^{-bs} + \frac{a}{b}(1 - e^{-bs}))ds \\
 &\quad + \frac{\sigma^2}{2} \int_t^T e^{2bu} \left(\frac{e^{-bu} - e^{-bT}}{b} \right)^2 du \\
 &= \frac{1}{b}(1 - e^{-b(T-t)})(r_0 e^{-bt} + \frac{a}{b}(1 - e^{-bt})) \\
 &\quad - \frac{r_0}{b}(e^{-bt} - e^{-bT}) - \frac{a}{b}(T-t) + \frac{a}{b^2}(e^{-bt} - e^{-bT}) \\
 &\quad + \frac{\sigma^2}{2b^2} \int_t^T (1 + e^{-2b(T-u)} - 2e^{-b(T-u)}) du \\
 &= \frac{a}{b^2}(1 - e^{-b(T-t)})(1 - e^{-bt}) - \frac{a}{b}(T-t) + \frac{a}{b^2}(e^{-bt} - e^{-bT}) \\
 &\quad + \frac{\sigma^2}{2b^2}(T-t) + \frac{\sigma^2}{2b^2}e^{-2bT} \int_t^T e^{2bu} du - \frac{\sigma^2}{b^2}e^{-bT} \int_t^T e^{bu} du \\
 &= \frac{a}{b^2}(1 - e^{-b(T-t)}) + \frac{\sigma^2 - 2ab}{2b^2}(T-t) \\
 &\quad + \frac{\sigma^2}{4b^3}(1 - e^{-2b(T-t)}) - \frac{\sigma^2}{b^3}(1 - e^{-b(T-t)}) \\
 &= \frac{4ab - 3\sigma^2}{4b^3} + \frac{\sigma^2 - 2ab}{2b^2}(T-t) \\
 &\quad + \frac{\sigma^2 - ab}{b^3}e^{-b(T-t)} - \frac{\sigma^2}{4b^3}e^{-2b(T-t)}.
 \end{aligned}$$

[Vas77]模型中计算 $P(t, T)$ 的另一种方法见练习 4.2。

注意到更一般地，如 (3.1) 式中定义的所有短期利率仿射模型包括 Vasicek 模型都服从债券定价公式

$$P(t, T) = e^{A(T-t) + C(T-t)r_t},$$

详情参阅[BM06]的 § 3.2.4. .

§4.5 偏微分方程的解：分析方法

在本节中我们将假设标的短期利率过程是(4.3)中Vasicek过程的解。为了用分析的方法求解偏微分方程(4.5)我们要找到一个形如

$$F(t, x) = e^{A(T-t) + xC(T-t)} \quad (4.9)$$

的解，其中 A 和 C 是在条件 $A(0) = 0$ 和 $C(0) = 0$ 下要确定的函数。将 (4.9) 代入偏微分方程 (4.5) 得到微分方程组

$$\begin{cases} -A'(s) = 1 - aC(s) - \frac{\sigma^2}{2}C^2(s) \\ -C'(s) = bC(s) + 1, \end{cases}$$

这可求解得到

$$A(s) = \frac{4ab - 3\sigma^2}{4b^3} + s \frac{\sigma^2 - 2ab}{2b^2} + \frac{\sigma^2 - ab}{b^3}e^{-bs} - \frac{\sigma^2}{4b^3}e^{-2bs}$$

和

$$C(s) = -\frac{1}{b}(1 - e^{-bs}).$$

作为验证我们很容易看出上面给出的 $C(s)$ 和 $A(s)$ 满足

$$bC(s) + 1 = -e^{-bs} = -C'(s),$$

和

$$\begin{aligned} aC(s) + \frac{\sigma^2 C^2(s)}{2} - 1 &= -\frac{1}{b}(1 - e^{-bs}) + \frac{\sigma^2}{2b^2}(1 - e^{-bs})^2 - 1 \\ &= \frac{\sigma^2 - 2ab}{2b^2} - \frac{\sigma^2 - ab}{b^2}e^{-bs} + \frac{\sigma^2}{2b^2}e^{-2bs} \\ &= A'(s). \end{aligned}$$

§4.6 数值模拟

给定如图 4.1中表示的Brown 运动的路径,

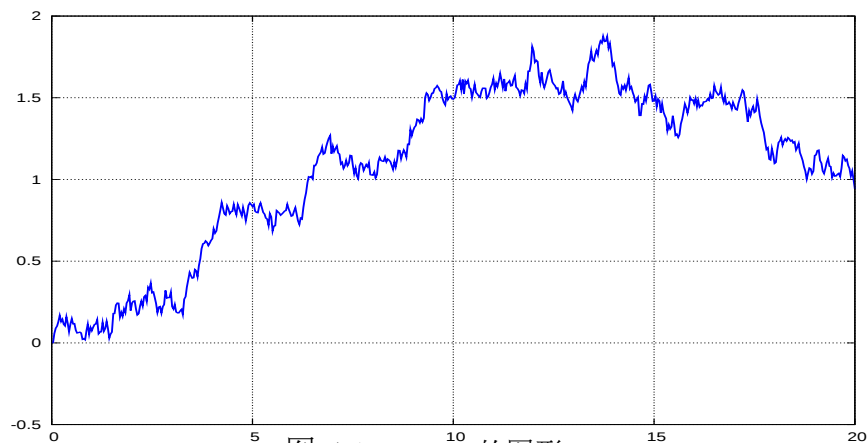


图 4.1: $t \mapsto B_t$ 的图形.

图 4.2展示了 $r_0 = a/b = 5\%$ 时Vasicek模型中 $t \mapsto r_t$ 的随机模拟, 即该过程的均值是回归于其初始值 $r_0 = 5\%$ 。注意到图 4.2中的利率在很短的期间内变成了负数, 这对利率还说的不正常, 但是 却又可能发生。[Bas 4]。

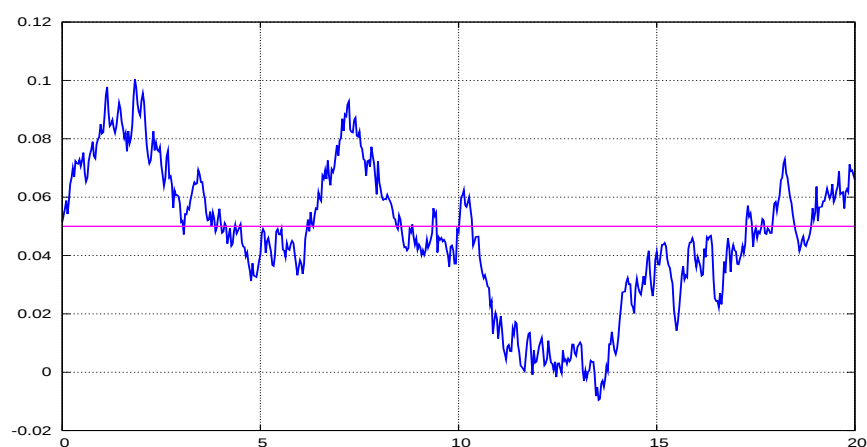


图 4.2: $t \mapsto r_t$ 的图形.

图 4.3展示了在相同的Vasicek模型中 $t \mapsto P(t, T)$ 的随机模拟。对于 $a = b = \sigma = 0$ 确定出的债券价格的图形也在图 4.3给出。

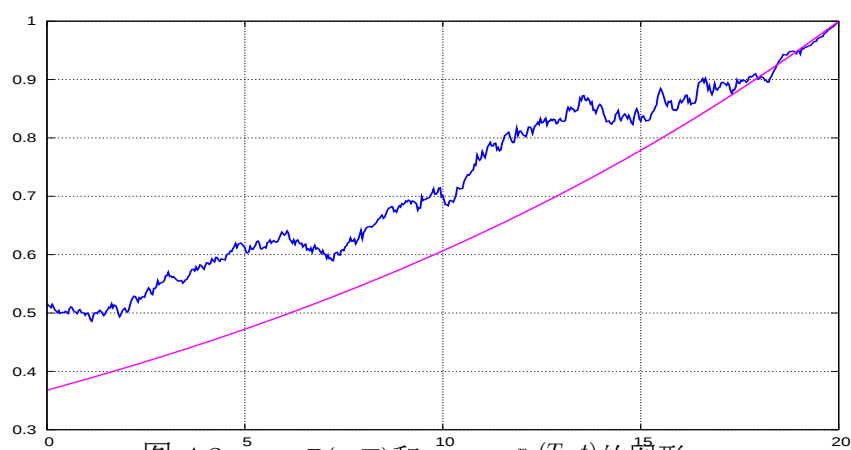


图 4.3: $t \mapsto P(t, T)$ 和 $t \mapsto e^{-r_0(T-t)}$ 的图形.

最后我们分别在图 4.4 和 4.5 中考虑函数 A 和 C 的图形。

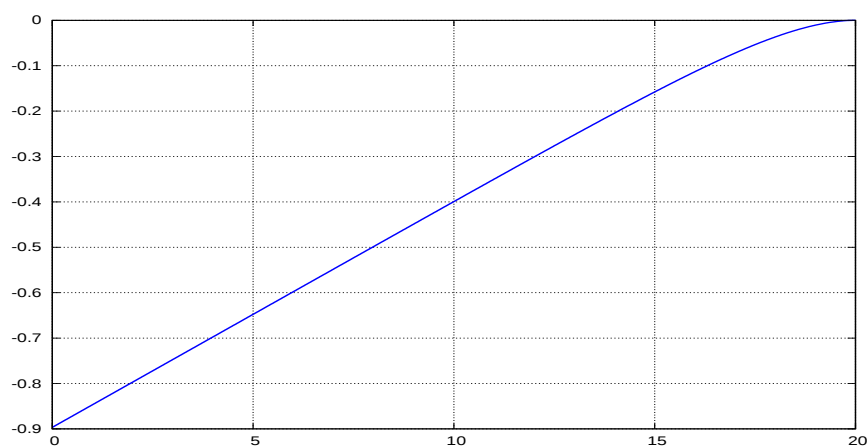


图 4.4: $t \mapsto A(T-t)$ 的图形.

在界定模型中很有用的价格偏微分方程的解在图 4.6 中给出。

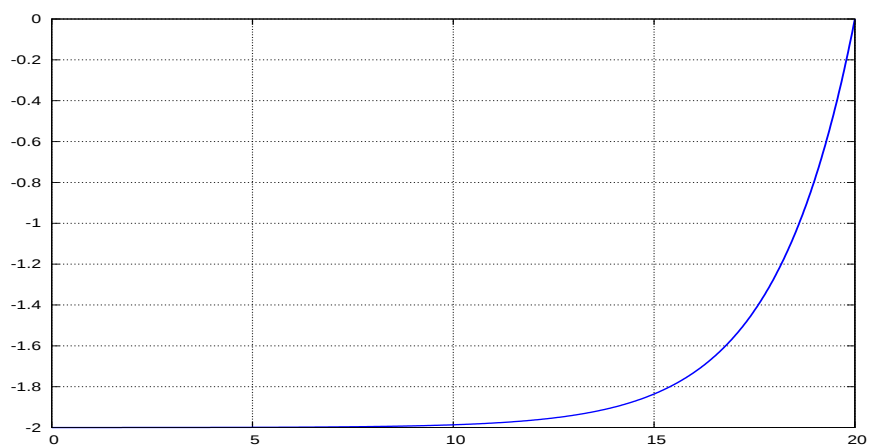


图 4.5: $t \mapsto C(T - t)$ 的图形.

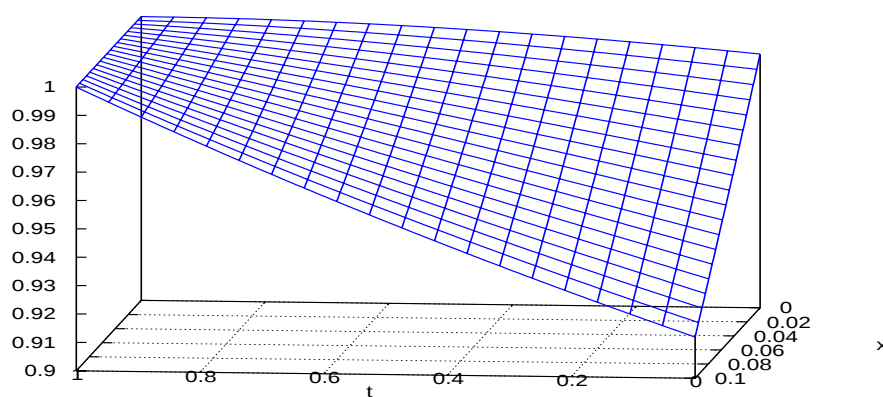


图 4.6: $(x, t) \mapsto \exp(A(T - t) + xC(T - t))$ 的图形.

§4.7 练习

练习 4.1. 考虑常数参数的Ho-Lee模型中的短期利率过程 $(r_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$:

$$dr_t = \theta dt + \sigma dW_t,$$

且设 $P(t, T)$ 将表示为该模型中零息债券的无套利价格:

$$P(t, T) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\exp \left(- \int_t^T r_s ds \right) \mid \mathcal{F}_t \right], \quad 0 \leq t \leq T. \quad (4.10)$$

1. 说明定义的函数 $F(t, x)$ 满足债券价格的偏微分方程

$$F(t, x) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\exp \left(- \int_t^T r_s ds \right) \mid r_t = x \right], \quad 0 \leq t \leq T.$$

2. 从条件期望形式的表达式 (4.10) 计算套利价格 $F(t, r_t) = P(t, T)$ 。
3. 验证在问题2中计算出来的函数 $F(t, x)$ 确实满足问题1中推导出来的偏微分方程。

练习 4.2. 考虑随机微分方程

$$\begin{cases} dX_t = -bX_t dt + \sigma dB_t, & t > 0, \\ X_0 = 0. \end{cases} \quad (4.11)$$

生成信息流 $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$, 其中 b 和 σ 是正值参数且 $(B_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ 是 $\mathbb{P}$ 下的标准 Brown 运动。

$$r_t = r + X_t, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

其中 $r > 0$ 是一个给定的常数。回顾一下, 由马氏性可知一个零息债券的套利价格

$$P(t, T) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\exp \left(- \int_t^T r_s ds \right) \mid \mathcal{F}_t \right], \quad 0 \leq t \leq T.$$

是一个关于 t 和 X_t 的函数 $F(t, X_t) = P(t, T)$ 。

1. 运用 Itô 算子, 推导函数 $(t, x) \mapsto F(t, x)$ 所满足的偏微分方程。
2. 求解随机微分方程 (4.11)。
3. 证明

$$\int_0^t X_s ds = -\frac{\sigma}{b} \left(\int_0^t (e^{-b(t-s)} - 1) dB_s \right), \quad t > 0.$$

4. 证明对于任意的 $0 \leq t \leq T$,

$$\int_t^T X_s ds = -\frac{\sigma}{b} \left(\int_0^t (e^{-b(T-s)} - e^{-b(t-s)}) dB_s + \int_t^T (e^{-b(T-s)} - 1) dB_s \right).$$

5. 证明

$$\mathbb{E} \left[\int_t^T X_s ds \mid \mathcal{F}_t \right] = -\frac{\sigma}{b} \int_0^t (e^{-b(T-s)} - e^{-b(t-s)}) dB_s.$$

6. 证明

$$\mathbb{E} \left[\int_t^T X_s ds \mid \mathcal{F}_t \right] = \frac{X_t}{b} (1 - e^{-b(T-t)}).$$

7. 证明

$$\text{Var} \left[\int_t^T X_s ds \mid \mathcal{F}_t \right] = \frac{\sigma^2}{b^2} \int_t^T (e^{-b(T-s)} - 1)^2 ds.$$

8. 给定 $\mathcal{F}_t$, $\int_t^T X_s ds$ 是什么?

9. 由条件期望形式的表达式(4.10)计算套利价格 $P(t, T)$ 并证明

$$P(t, T) = e^{A(t, T) - r(T-t) + X_t C(t, T)},$$

其中 $C(t, T) = \frac{1}{b}(e^{-b(T-t)} - 1)$ 和

$$A(t, T) = \frac{\sigma^2}{2b^2} \int_t^T (e^{-b(T-s)} - 1)^2 ds.$$

10. 验证在问题 9 中显示计算出来的函数 $F(t, x) = e^{A(t, T) + r(T-t) + xC(t, T)}$ 确实是问题 1 中推导出的偏微分方程的解。

练习 4.3. (练习 3.2 续). 写出债券价格函数

$$F(t, x) = E \left[e^{-\int_t^T r_s ds} \mid r_t = x \right]$$

的偏微分方程, 并证明当 $\alpha = 0$ 时, 相应的债券价格 $P(t, T)$ 等于

$$P(t, T) = e^{-B(T-t)r_t}, \quad 0 \leq t \leq T,$$

其中

$$B(x) = \frac{2(e^{\gamma x} - 1)}{2\gamma + (\beta + \gamma)(e^{\gamma x} - 1)},$$

并有 $\gamma = \sqrt{\beta^2 + 2\sigma^2}$.

练习 4.4. 设 $(r_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ 表示短期利率过程。对于任意的 $T > 0$, 设 $P(t, T)$ 表示在时刻 $t \in [0, T]$ 的由随机微分方程

$$\frac{dP(t, T)}{P(t, T)} = r_t dt + \sigma_t^T dB_t, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (4.12)$$

定义的零息债券在终端条件 $P(T, T) = 1$ 下的价格，其中 $(\sigma_t^T)_{t \in [0, T]}$ 是一个适应过程。设远期利率测度 $\mathbb{P}_T$ 定义为

$$\mathbb{E} \left[\frac{d\mathbb{P}_T}{d\mathbb{P}} \mid \mathcal{F}_t \right] = \frac{P(t, T)}{P(0, T)} e^{-\int_0^t r_s ds}, \quad 0 \leq t \leq T.$$

回顾前面知

$$B_t^T := B_t - \int_0^t \sigma_s^T ds, \quad 0 \leq t \leq T,$$

是一个在 $\mathbb{P}_T$ 下的标准布朗运动。

1. 求解随机微分方程 (4.12).
2. 求出折扣债券价格过程所满足的随机微分方程

$$t \mapsto e^{-\int_0^t r_s ds} P(t, T), \quad 0 \leq t \leq T,$$

并证明它是一个鞅。

3. 证明

$$\mathbb{E} \left[e^{-\int_0^T r_s ds} \mid \mathcal{F}_t \right] = e^{-\int_0^t r_s ds} P(t, T), \quad 0 \leq t \leq T.$$

4. 证明

$$P(t, T) = \mathbb{E} \left[e^{-\int_t^T r_s ds} \mid \mathcal{F}_t \right], \quad 0 \leq t \leq T.$$

5. 计算 $P(t, S)/P(t, T)$, $0 \leq t \leq T$, 并证明它是在 $\mathbb{P}_T$ 下的鞅且

$$P(t, S) = \frac{P(t, S)}{P(t, T)} \exp \left(\int_t^T (\sigma_s^S - \sigma_s^T) dB_s^T - \frac{1}{2} \int_t^T (\sigma_s^S - \sigma_s^T)^2 ds \right).$$

练习 4.5. (练习 1.8 续). 假设某零息债券的价格 $P(t, T)$ 被模拟为

$$P(t, T) = e^{-\mu(T-t) + X_t^T}, \quad t \in [0, T],$$

其中 $\mu > 0$ 。证明终端条件 $P(T, T) = 1$ 成立。

第五章 远期利率模拟

本章中我们基于无套利理论用 4 章中的零息债券的结构来定义远期利率和远期瞬时利率。并且我们还考虑远期利率的参数问题。

§5.1 远期合约

金融机构常常需要在当前时刻 t 时获得一笔在未来的时间段 $[T, S]$ 内利率为 $r(t, T, S)$, $t \leq T \leq S$ 的贷款。这种远期利率合约使得其持有者获得一笔在当前时刻 t 确定而在未来时间段 $[T, S]$ 拥有的贷款。换句话说, 在时刻 t 一个投资者需要一笔在未来时间段 $[T, S]$ 内的贷款且要在时刻 S 偿还一个单位资金。

这笔贷款中所用的利率表示为 $f(t, T, S)$ 并称之为远期利率。在此我们感兴趣的是如何利用债券市场的工具, 也就是对于不同的到期日 $T > t$ 的债券价格 $P(t, T)$ 来确定这个利率的无套利或者“公平”价格。

这笔贷款可用市场中现有的债券通过以下两个步骤来实现:

- 1) 在时刻 t 以价格 $P(t, S)$ 借入 1\$, 并在时刻 S 归还。
- 2) 由于只在时刻 T 需要资金, 只要在时间区间 $[t, T]$ 内投资数量为 $P(t, S)$ 到期日为 T 的债券, 这将使得在时刻 T 获得 $P(t, S)/P(t, T)$ 。

最终该投资者将在时刻 T 收入 $P(t, S)/P(t, T)$ 并在时刻 S 偿还一个单位的金额。

相应的远期利率 $f(t, T, S)$, $0 \leq t \leq T \leq S$ 由以下关系式给出

$$\exp((S - T)f(t, T, S)) = \left(\frac{P(t, S)}{P(t, T)}\right)^{-1},$$

这导出了以下定义。

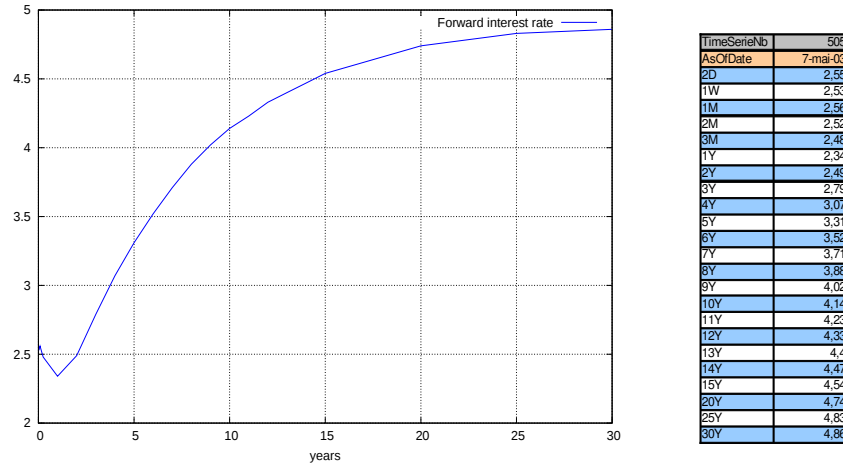


图 5.1: $T \mapsto f(t, T, T + \delta)$ 的图像.

定义 5.1. 时刻 t 时的在 $[T, S]$ 贷款的远期利率 $f(t, T, S)$ 由下式给出

$$f(t, T, S) = -\frac{\log P(t, S) - \log P(t, T)}{S - T}.$$

即期利率 $F(t, T)$ 由下式给出

$$F(t, T) := f(t, t, T) = -\frac{\log P(t, T)}{T - t}.$$

图 5.1 给出了 LIBOR（伦敦银行间同业拆借利率）市场中 $t = 2003$ 年 5 月 7 日， $\delta = 6$ 个月的远期利率的一条典型曲线。回顾 Vasicek 模型，即当短期利率过程为以下方程的解时，

$$dr_t = (a - br_t)dt + \sigma dB_t$$

我们有

$$P(t, T) = e^{C(T-t)r_t + A(T-t)}$$

其中

$$C(T - t) = -\frac{1}{b}(1 - e^{-b(T-t)})$$

且

$$A(T - t) = \frac{4ab - 3\sigma^2}{4b^3} + \frac{\sigma^2 - 2ab}{2b^2}(T - t) + \frac{\sigma^2 - ab}{b^3}e^{-b(T-t)} - \frac{\sigma^2}{4b^3}e^{-2b(T-t)},$$

见 4 章, 因此

$$\log P(t, T) = A(T - t) + r_t C(T - t)$$

且

$$\begin{aligned} f(t, T, S) &= -\frac{\log P(t, S) - \log P(t, T)}{S - T} \\ &= -\frac{r_t(C(S - t) - C(T - t)) + A(S - t) - A(T - t)}{S - T} \\ &= -\frac{\sigma^2 - 2ab}{2b^2} \\ &\quad - \frac{1}{S - T} \left(\left(\frac{r_t}{b} + \frac{\sigma^2 - ab}{b^3} \right) (e^{-b(S-t)} - e^{-b(T-t)}) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\sigma^2}{4b^3} (e^{-2b(S-t)} - e^{-2b(T-t)}) \right). \end{aligned}$$

在该模型中远期利率 $t \mapsto f(t, T, S)$ 可被重新表示如图 5.2, 在此 $b/a > r_0$ 。

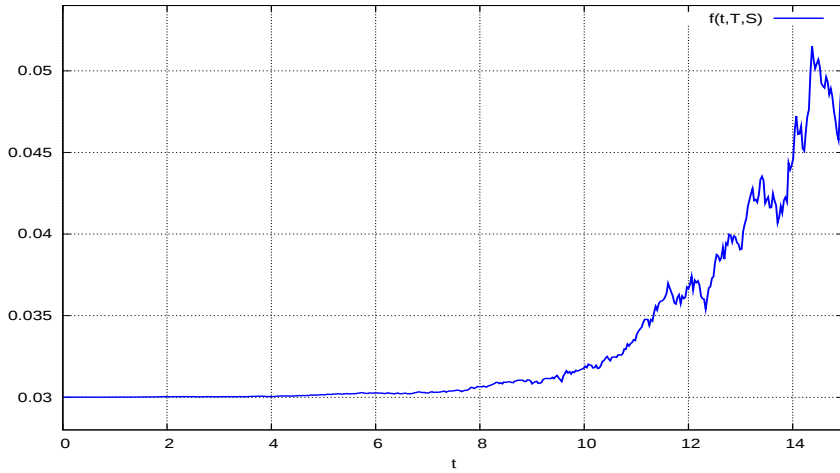


图 5.2: 远期利率过程 $t \mapsto f(t, T, S)$.

注意到远期利率曲线当 t 取较小值时是直的。该模型问题将在多维模型的框架下在 8 章中重新考虑。

§5.2 瞬时远期利率

瞬时远期利率 $f(t, T)$ 定义为当 $S \searrow T$ 时 $f(t, T, S)$ 的极限, 即

$$\begin{aligned} f(t, T) : &= - \lim_{S \searrow T} \frac{\log P(t, S) - \log P(t, T)}{S - T} \\ &= - \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{\log P(t, T + \varepsilon) - \log P(t, T)}{\varepsilon} \\ &= - \frac{\partial \log P(t, T)}{\partial T} \\ &= - \frac{1}{P(t, T)} \frac{\partial P(t, T)}{\partial T}. \end{aligned}$$

上述方程可被看作是在初始条件 $P(T, T) = 1$ 下求解关于 $\log P(t, T)$ 的微分方程, 这可得

$$\begin{aligned} \log P(t, T) &= \log P(t, T) - \log P(t, t) \\ &= \int_t^T \frac{\partial \log P(t, s)}{\partial s} ds \\ &= - \int_t^T f(t, s) ds, \end{aligned}$$

因此

$$P(t, T) = \exp \left(- \int_t^T f(t, s) ds \right), \quad 0 \leq t \leq T. \quad (5.1)$$

远期利率 $f(t, T, S)$ 可以由瞬时远期利率 $f(t, s)$ 重新得到:

$$f(t, T, S) = \frac{1}{S - T} \int_T^S f(t, s) ds, \quad (5.2)$$

$0 \leq t \leq T < S$. $(r_s)_{s \in \mathbb{R}_+}$ 是一个确定的函数, 我们有

$$P(t, T) = \exp \left(- \int_t^T f(t, s) ds \right) = \exp \left(- \int_t^T r_s ds \right), \quad (5.3)$$

$0 \leq t \leq T$, 因此瞬时远期利率 $f(t, T)$ 也是一个确定的函数并且与 t 无关:

$$f(t, T) = r_T, \quad 0 \leq t \leq T,$$

并且远期利率 $f(t, T, S)$ 由

$$f(t, T, S) = \frac{1}{S - T} \int_T^S r_s ds, \quad 0 \leq t \leq T < S$$

给出，这是确定利率 r_s 在时间区间 $[T, S]$ 内的均值。

更进一步，在 $(r_s)_{s \in \mathbb{R}_+}$ 与时间无关且等于常数 $r > 0$ 的情形下，所有的利率是一致的且都等于 r ：

$$r_s = f(t, s) = f(t, T, S) = r, \quad 0 \leq t \leq T \leq s < S.$$

例如，在 §5.1 章中考虑的 Vasicek 随机利率模型我们有

$$\begin{aligned} f(t, T) &:= -\frac{\partial \log P(t, T)}{\partial T} \\ &= r_t e^{-b(T-t)} + \frac{a}{b}(1 - e^{-b(T-t)}) - \frac{\sigma^2}{2b^2}(1 - e^{-b(T-t)})^2, \end{aligned} \quad (5.4)$$

且由该公式易得等式 $\lim_{T \searrow t} f(t, T) = r_t$ 。

在该模型中瞬时远期利率 $t \mapsto f(t, T)$ 可重新表示如图 5.3，其中 $t = 0$ 且 $b/a > r_0$ ：

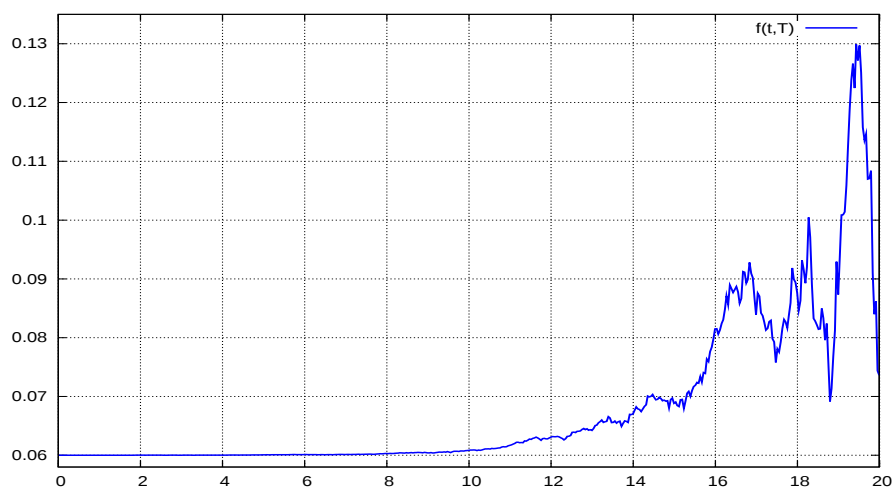
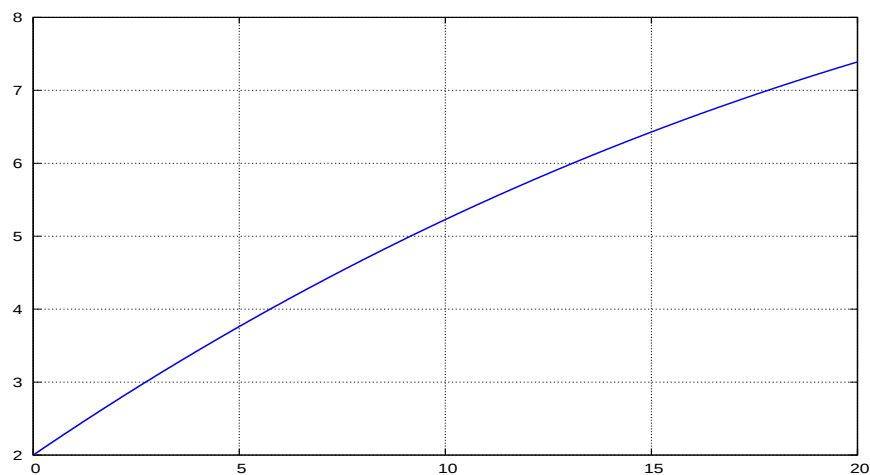


图 5.3: 瞬时远期利率 $t \mapsto f(t, T)$ 。

在另一方面，瞬时远期利率 $T \mapsto f(t, T)$ 可重新表示如图 5.4，其中 $t = 0$ 且 $b/a > r_0$ 。

图 5.4: 瞬时远期利率 $T \mapsto f(0, T)$.

§5.3 短期利率

标的短期利率过程 $(r_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ 可由其与债券价格的关系式得到

$$P(t, T) = \mathbb{E} \left[\exp \left(- \int_t^T r_s ds \right) \mid r_t \right].$$

实际上我们有

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial T}(t, T) &= \frac{\partial}{\partial T} \mathbb{E} \left[\exp \left(- \int_t^T r_s ds \right) \mid r_t \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\frac{\partial}{\partial T} \exp \left(- \int_t^T r_s ds \right) \mid r_t \right] \\ &= -\mathbb{E} \left[r_T \exp \left(- \int_t^T r_s ds \right) \mid r_t \right], \end{aligned}$$

因此

$$\lim_{T \searrow t} \frac{\partial P}{\partial T}(t, T) = -\mathbb{E}[r_t | r_t] = -r_t,$$

且瞬时远期利率的极限 $\lim_{T \searrow t} f(t, T)$ 等于短期利率 r_t , 即

$$\lim_{T \searrow t} f(t, T) = -\lim_{T \searrow t} \frac{1}{P(t, T)} \frac{\partial P(t, T)}{\partial T} = r_t,$$

因为 $\lim_{T \searrow t} P(t, T) = 1$ 。

注意到在 Vasicek 模型中由关系式(5.4)易得等式 $\lim_{T \searrow t} f(t, T) = r_t$ 。

§5.4 远期利率的参数化

图 5.4中表示的远期利率曲线和图 5.1中的市场数据曲线相似，（例如，它们都是递增的），然而显然它没有远期利率曲线中的一些经典特征，比如在图形左边的下凹。由于这个原因，引入了其他的远期利率参数化。

随后我们将频繁使用Musielà的记号，即我们将用

$$g(x) = f(t, t+x) = f(t, T),$$

来代替 $x = T - t, x \geq 0$.

Nelson–Siegel 参数化

曲线族通过4个参数 z_1, z_2, z_3, z_4 来参数化为

$$g(x) = z_1 + (z_2 + z_3 x)e^{-xz_4}, \quad x \geq 0.$$

对 $z_1 = 1, z_2 = -10, z_3 = 100, z_4 = 10$ 用Nelson–Siegel参数化得到的图例在图 5.5给出。

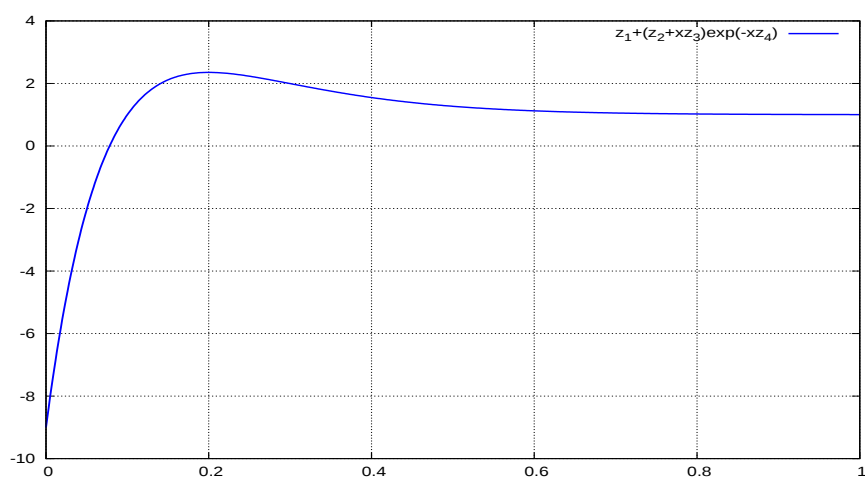


图 5.5: Nelson–Siegel模型中 $x \mapsto g(x)$ 的图形。

Svensson 参数化

Svensson曲线族的优点是使曲线有两处下凹而不是一处，下凹处和下凹深度可通过6个参数 $z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6$ 来调整为

$$g(x) = z_1 + (z_2 + z_3 x)e^{-xz_4} + z_5 x e^{-xz_6}, \quad x \geq 0.$$

对于 $z_1 = 7, z_2 = -5, z_3 = -100, z_4 = 10, z_5 = -1/2, z_6 = 1$ ，一个典型的Svensson参数化的图形在图 5.6中给出。

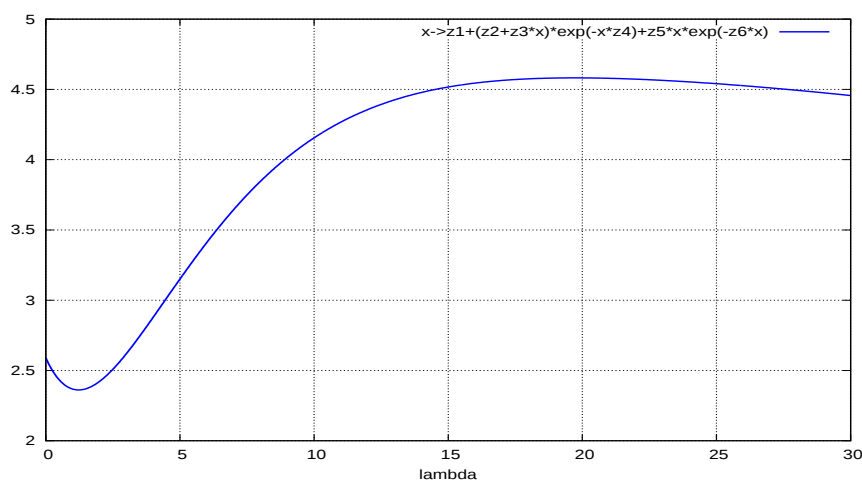


图 5.6: Svensson模型中 $x \mapsto g(x)$ 的图形。

§5.5 曲线估计

一个估计远期曲线的简单办法是基于到期日为 $T_1, T_2, \dots, T_n$ 的债券价格 $(P(t, T_k))_{k=1, \dots, n}$ 的市场数据是假设瞬时远期利率是一个阶梯函数：

$$g(x) = \sum_{k=1}^n \alpha_k 1_{[T_{k-1}, T_k]}(x),$$

令 $T_0 = 0$ 。这种情形下我们有关系式

$$\frac{P(t, T_k)}{P(t, T_{k-1})} = \exp \left(- \int_{T_{k-1}}^{T_k} g(x) dx \right) = \exp (-\alpha_k (T_k - T_{k-1})),$$

因此

$$\alpha_k = -\frac{1}{T_k - T_{k-1}} \log \frac{P(t, T_k)}{P(t, T_{k-1})}, \quad k = 1, \dots, n.$$

引入关于 $g(x)$ 的某种光滑性质，例如二次可微性，我们可以得到一个更实际的估计。这样， $g(x)$ 的估计可由最小化问题得出。

$$\min_g \left(\lambda \int_0^{T_n} |g''(x)|^2 dx + \sum_{k=1}^n \beta_k \left| \frac{P(t, T_k)}{P(t, T_{k-1})} - \exp \left(- \int_{T_{k-1}}^{T_k} g(x) dx \right) \right|^2 \right)$$

其中 $\beta_1, \dots, \beta_n$ 和 λ 是正参数。

§5.6 练习

练习 5.1. (练习 4.1 续).

1. 计算该模型中的远期利率 $f(t, T, S)$ 。
2. 计算该模型中的远期瞬时利率 $f(t, T)$ 。

练习 5.2. (练习 4.2 续).

1. 计算远期利率

$$f(t, T, S) = - \frac{\log P(t, S) - \log P(t, T)}{S - T}.$$

2. 计算远期瞬时利率

$$f(t, T) = \lim_{S \searrow T} f(t, T, S).$$

练习 5.3. (练习 4.5 续).

1. 计算远期利率

$$f(t, T, S) = - \frac{1}{S - T} (\log P(t, S) - \log P(t, T)).$$

2. 计算瞬时远期利率

$$f(t, T) = - \lim_{S \searrow T} \frac{1}{S - T} (\log P(t, S) - \log P(t, T)).$$

3. 证明在 $L^2(\Omega)$ 中不存在极限 $\lim_{T \searrow t} f(t, T)$.

4. 证明 $P(t, T)$ 满足随机微分方程

$$\frac{dP(t, T)}{P(t, T)} = \sigma dB_t + \frac{1}{2} \sigma^2 dt - \frac{\log P(t, T)}{T - t} dt, \quad t \in [0, T].$$

5. 利用练习 4.5-(4) 的结果, 证明

$$P(t, T) = \mathbb{E} \left[e^{-\int_t^T r_s^T ds} \mid \mathcal{F}_t \right],$$

其中 $(r_t^T)_{t \in [0, T]}$ 是一个待定过程。

第六章 Heath–Jarrow–Morton (HJM)模型

本章中我们将介绍HJM模型[HJM92]，在这个模型中远期利率的演变是无限维的，并且可以看成是在某个函数空间中取值的随机过程。我们同时介绍HJM无套利条件，在这个条件下，我们将得到时间相依的短期利率模型，例如Hull–White模型。

§6.1 目标重述

在进行下一步讨论之前我们先回顾本章的目标：

1. 找到一个描述标的（远期）利率的（随机）模型。
2. 推导以关于模型参数的函数来表示的（期权）定价公式。
3. 通过使所计算的价格与市场价格吻合来界定模型的参数。
4. 利用模型界定的参数来计算“新”的产品价格。

我们可以考虑关于利率的哪种期权呢？

利率上限是利率期权的一个标准例子。一个利率上限将能保护借款方免受利率超过一定水平 κ 的风险。比如说，一个以在时刻 T 到期的短期利率为标的利率上限的损益用利率（基本）点表示等于

$$r_T - \min(\kappa, r_T) = (r_T - \kappa)^+.$$

然而在实际中这种类型的利率上限作用不大，因为：

- a) 在时刻 T 的瞬时利率 r_T 不是一个可交易的资产，

b) r_T 是一个只有在很短的时间区间 $[T, T + dt]$ 内才有意义的利率。

关于前面所述的(a)点, 债券价格 $P(T, S)$ 是一个可交易的资产, 并在马氏条件下可以写成 r_T 的函数

$$P(T, S) = F(T, r_T),$$

这样损益为

$$(K - P(T, S))^+ = (K - F(T, r_T))^+$$

的期权也就有意义了。

至于(b)点, 可以考虑关于在一个给定时间区间内的短期利率的均值的利率上限, 它的损益为

$$\max \left(\kappa, \frac{1}{S - T} \int_T^S r_s ds \right),$$

然而这个均值需要直到时刻 S 为止的信息, 并且除了 短期利率是确定的情况之外, 它不是直接与债券价格联系在一起的。

回顾当 $(r_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ 是确定的情形, 这个均值等于远期利率

$$f(t, T, S) = \frac{1}{S - T} \int_T^S r_s ds,$$

参考关系式 (5.3), 这样在一般情况下远期利率就可以通过对瞬时利率 $f(t, s)$ 取均值得到

$$f(t, T, S) = \frac{1}{S - T} \int_T^S f(t, s) ds,$$

参考关系式 (5.2).

在实际中, 利率期权合约一般是关于远期利率而不是短期利率过程 $(r_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ 来订立的。除此之外, 由于远期利率 $f(t, T, S)$ 是在时刻 t 时已知的 (即它是 $\mathcal{F}_t$ -可测的), 则考虑关于远期即时利率

$$f(T, T, S) = \frac{1}{S - T} \int_T^S f(T, s) ds$$

的期权更有意义，从上述表达式可看出远期即时利率在时刻 t 是随机的（更准确地说，它是 $\mathcal{F}_T$ 可测的，但不是 $\mathcal{F}_t$ 可测的）。

这样一个利率上限的损益函数一般都有以下的形式

$$\max(\kappa, f(T, T, S)) = \kappa + (f(T, T, S) - \kappa)^+.$$

选择另一个不同的损益函数，合约的损益的形式为

$$\begin{aligned} (K - e^{-(S-T)f(T,T,S)})^+ &= \left(K - \exp\left(-\int_T^S f(T, s)ds\right) \right)^+ \\ &= (K - P(T, S))^+, \end{aligned}$$

并且其中包含关于债券价格 $P(T, S) = e^{-(S-T)f(T,T,S)}$ 的标准欧式看涨期权。

这引导我们思考如何来模拟远期利率 $f(t, T, S)$ 这个重要的问题；确切地说我们将在下一节开始考虑瞬时远期利率 $f(t, T)$ 建模。

在图 6.1中给出的形状表明了用Musielaa卷积来模拟远期利率曲线随机演变的可能性，即对所有的 $t \in \mathbb{R}_+$ ，可给出瞬时远期利率曲线 $x \mapsto f(t, t+x)$ 的样本。

§6.2 远期 Vasicek 利率

回顾Vasicek模型，瞬时远期利率过程 (5.4) 由下式给出

$$\begin{aligned} f(t, T) &= r_t e^{-b(T-t)} + \frac{a}{b}(1 - e^{-b(T-t)}) - \frac{\sigma^2}{2b^2}(1 - e^{-b(T-t)})^2 \\ &= r_t e^{-b(T-t)} - aC(T-t) - \frac{\sigma^2}{2}C^2(T-t), \end{aligned}$$

参考关系式 (5.4)，其中

$$C(x) = -\frac{1}{b}(1 - e^{-bx}), \quad x \in \mathbb{R}_+.$$

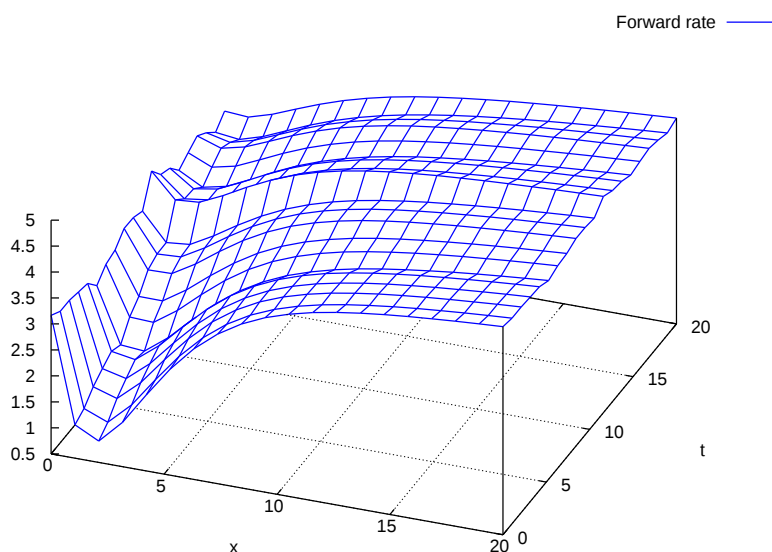


图 6.1: 远期利率的随机过程.

短期利率过程是如下方程的解

$$dr_t = (a - br_t)dt + \sigma dB_t, \quad (6.1)$$

其中

$$\begin{aligned} r_t &= e^{-bt}r_0 + \frac{a}{b}(1 - e^{-bt}) + \sigma \int_0^t e^{-b(t-s)}dB_s \\ &= f(0, t) + \frac{\sigma^2}{2b^2}(1 - e^{-bt})^2 + \sigma \int_0^t e^{-b(t-s)}dB_s, \end{aligned}$$

其中

$$f(0, t) = e^{-bt}r_0 + \frac{a}{b}(1 - e^{-bt}) - \frac{\sigma^2}{2b^2}(1 - e^{-bt})^2, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

是确定的。

下面我们来设定在Vasicek模型中远期利率过程 $(f(t, T))_{t \in [0, T]}$ 的动力系统。我们有

$$\begin{aligned} d_t f(t, T) &= e^{-b(T-t)}dr_t + be^{-b(T-t)}r_t dt + aC'(T-t)dt + \sigma^2 C(T-t)C'(T-t)dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (a - br_t)e^{-b(T-t)}dt + \sigma e^{-b(T-t)}dB_t + be^{-b(T-t)}r_tdt \\
 &\quad - aC'(T-t)dt + \sigma^2 C'(T-t)C'(T-t)dt \\
 &= -\sigma^2 C'(T-t)e^{-b(T-t)}dt + \sigma e^{-b(T-t)}dB_t \\
 &= e^{-b(T-t)}\frac{\sigma^2}{b}(1 - e^{-b(T-t)})dt + \sigma e^{-b(T-t)}dB_t \\
 &= \sigma^2 e^{-b(T-t)} \int_t^T e^{b(t-s)}dsdt + \sigma e^{-b(T-t)}dB_t.
 \end{aligned}$$

因此 $d_t f(t, T)$ 可写成

$$d_t f(t, T) = \alpha(t, T)dt + \sigma(t, T)dB_t$$

其中 $\sigma(t, T) = \sigma e^{-b(T-t)}$ 且

$$\begin{aligned}
 \alpha(t, T) &= \sigma^2 e^{-b(T-t)} \int_t^T e^{-b(s-t)}ds \\
 &= \sigma(t, T) \int_t^T \sigma(t, s)ds.
 \end{aligned} \tag{6.2}$$

在下一节中我们将看到关于 $\alpha(t, T)$ 和 $\sigma(t, T)$ 关系式 (6.2) 是不一致的, 但却是远期利率动力系统 无套利假设的一个一般结果。并且注意到(6.1)中的参数 a 在上式(6.2)中消失了。Vasicek 瞬时远期利率的一个随机模拟 在图 6.2 中给出。

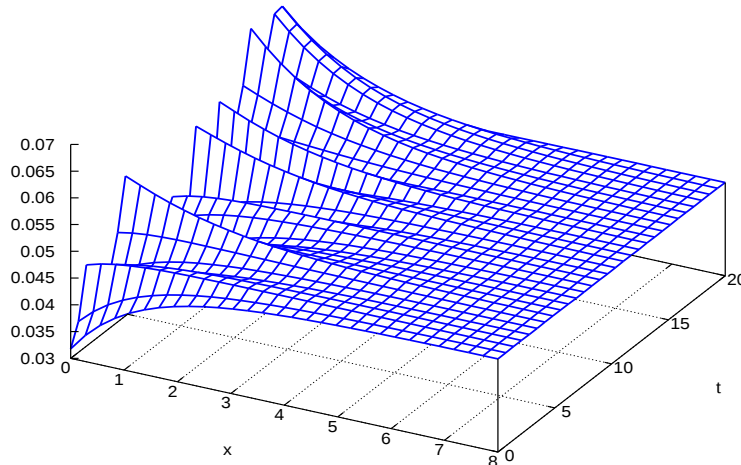
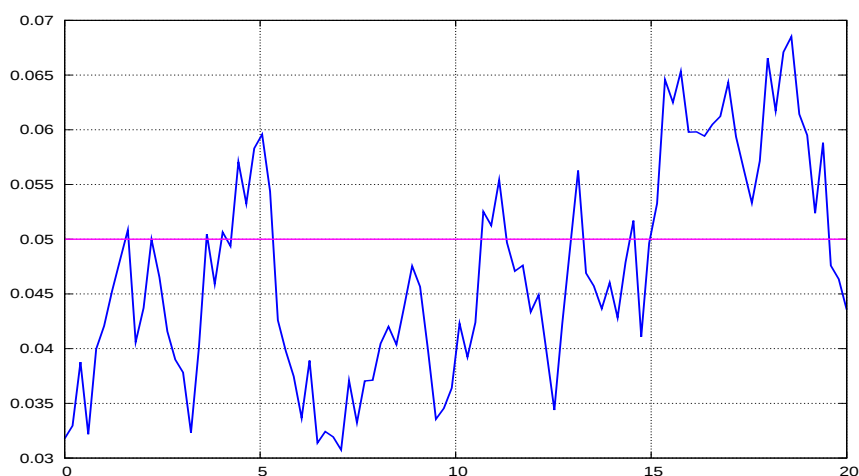


图 6.2: Vasicek 模型下的远期瞬时利率曲线 $(t, x) \mapsto f(t, t+x)$.

回顾对于 $x = 0$ 曲面的第一个“切片” 正式短期利率 Vasicek 过程 $r_t = f(t, t) = f(t, t+0)$, 这在图 6.3 中通过另一种离散化方法给出。

图 6.3: Vasicek模型下的短期利率曲线 $t \mapsto r_t$.

注意到对固定的 t , 所有的Vasicek瞬时远期曲线收敛于“长期”利率, 即当 x 趋于无穷时,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(t, t+x) = \lim_{T \rightarrow \infty} f(t, T) = \frac{a}{b} - \frac{\sigma^2}{2b^2}.$$

用Musielà 记号($x = T - t$)表示我们有

$$\begin{aligned} f(t, T) = f(t, t+x) &= r_t e^{-bx} + \frac{a}{b}(1 - e^{-bx}) - \frac{\sigma^2}{2b^2}(1 - e^{-bx})^2 \\ &= \frac{a}{b} - \frac{\sigma^2}{2b^2} + \left(r_t - \frac{a}{b} + \frac{\sigma^2}{b^2}\right)e^{-bx} - \frac{\sigma^2}{2b^2}e^{-2bx}, \end{aligned}$$

因此对所有的 $t > 0$, Vasicek模型中的瞬时远期曲线“存在”于由以下函数产生的空间

$$x \mapsto z_1 + z_2 e^{z_3 x} + z_4 e^{z_5 x}, \quad x \in \mathbb{R}_+, \quad (6.3)$$

其中

$$\begin{cases} z_1 = \frac{a}{b} - \frac{\sigma^2}{2b^2}, \\ z_2 = r_t - \frac{a}{b} + \frac{\sigma^2}{b^2}, \\ z_3 = -b, \\ z_4 = -\frac{\sigma^2}{2b}, \\ z_5 = -2b. \end{cases}$$

但不幸的是，这个函数空间既不属于 §5.4 节中的 Nelson–Siegel 空间，也不属于 §5.4 节中的 Svensson 空间，参见 §3.5 of [Bjö04]。在 Vasicek 模型中这种曲线的一条典型轨道在图 5.4 中给出。然而模拟在前一章中考虑的远期曲线看起来并不是很实际，见图 6.4。

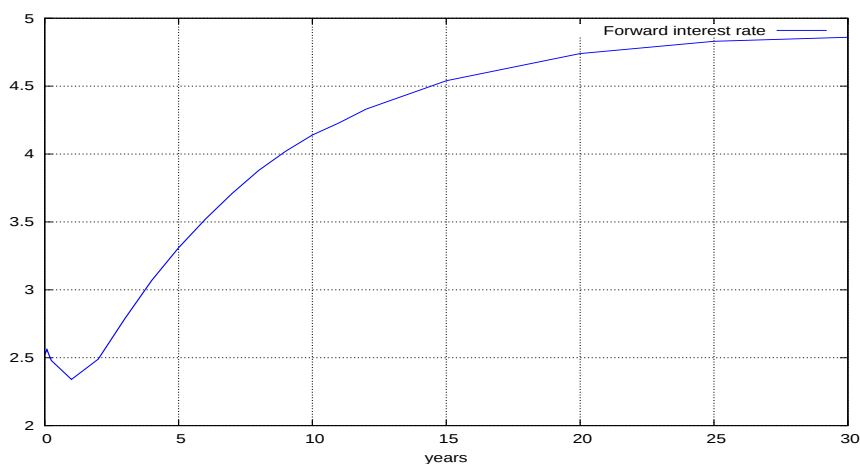


图 6.4: LIBOR 远期利率的市场数据 $T \mapsto f(t, T, T + \delta)$.

因此，形如

$$x \mapsto g(x) = z_1 + (z_2 + z_3 x)e^{-xz_4} + z_5 x e^{-xz_6}, \quad x \in \mathbb{R}_+,$$

的 Svensson 曲线看起来可得到一个更好的模拟，见图 5.6。

§6.3 远期即时利率的动力系统

在 HJM 模型中，瞬时远期利率 $f(t, T)$ 可用如下的随机微分方程来模拟

$$d_t f(t, T) = \alpha(t, T)dt + \sigma(t, T)dB_t, \quad (6.4)$$

其中 $t \mapsto \alpha(t, T)$ 和 $t \mapsto \sigma(t, T)$, $0 \leq t \leq T$ 可以是随机（适应）过程。在上述的等式中，时刻 T 是固定的且微分 d_t 是关于 t 的。

在 Vasicek 模型中参数 α 和 σ 实际上是确定的且回顾上一节我们有

$$\alpha(t, T) = \sigma^2 e^{-b(T-t)} \int_t^T e^{-b(T-s)} ds, \quad \text{and} \quad \sigma(t, T) = \sigma e^{-b(T-t)}.$$

下面，我们将确定远期即时利率的动力系统。在条件(6.4)下，

$$\begin{aligned} f(t, t, T) &= \frac{1}{T-t} \int_t^T f(t, s) ds \\ &= \frac{X_t}{T-t}, \quad 0 \leq t \leq T, \end{aligned} \quad (6.5)$$

其中

$$X_t = \int_t^T f(t, s) ds = -\log P(t, T), \quad 0 \leq t \leq T.$$

且 $t \mapsto f(t, s)$ 的动力系统由 (6.4) 给出。我们有

$$\begin{aligned} d_t X_t &= -f(t, t) dt + \int_t^T d_t f(t, s) ds \\ &= -f(t, t) dt + \int_t^T \alpha(t, s) ds dt + \int_t^T \sigma(t, s) ds dB_t \\ &= -r_t dt + \left(\int_t^T \alpha(t, s) ds \right) dt + \left(\int_t^T \sigma(t, s) ds \right) dB_t, \end{aligned}$$

因此

$$|d_t X_t|^2 = \left(\int_t^T \sigma(t, s) ds \right)^2 dt,$$

且对于 $\mathcal{C}^2$ 函数 h 由伊藤公式可得

$$\begin{aligned} d_t h(t, X_t) &= \frac{\partial h}{\partial t}(t, X_t) dt - r_t \frac{\partial h}{\partial x}(t, X_t) dt + \int_t^T \alpha(t, s) ds \frac{\partial h}{\partial x}(t, X_t) dt \\ &\quad + \int_t^T \sigma(t, s) ds \frac{\partial h}{\partial x}(t, X_t) dB_t + \frac{1}{2} \left(\int_t^T \sigma(t, s) ds \right)^2 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(t, X_t) dt. \end{aligned}$$

特别地，远期即时利率(6.5)的动力系统为

$$\begin{aligned} d_t f(t, t, T) &= \frac{X_t}{(T-t)^2} dt + \frac{1}{T-t} d_t X_t \\ &= \frac{f(t, t, T)}{T-t} dt - \frac{r_t}{T-t} dt \\ &\quad + \frac{1}{T-t} \int_t^T \alpha(t, s) ds dt + \frac{1}{T-t} \int_t^T \sigma(t, s) ds dB_t. \end{aligned}$$

在 Vasicek 模型中这给出了

$$\begin{aligned} d_t f(t, t, T) &= \frac{f(t, t, T)}{T-t} dt - \frac{r_t}{T-t} dt \\ &\quad + \frac{\sigma^2}{T-t} \left(\int_t^T e^{-b(s-t)} \int_t^s e^{-b(t-u)} du ds \right) dt + \frac{\sigma}{T-t} \left(\int_t^T e^{-b(s-t)} ds \right) dB_t. \end{aligned}$$

§6.4 HJM 条件

一个重要的问题是在金融领域中在什么条件下等式(6.4)才有意义，特别地在 (6.4)的什么条件下市场是无套利的。

在无套利的假设下，债券价格 $P(t, T)$ 可被定义（见 4章）为

$$P(t, T) = \mathbb{E}_Q \left[\exp \left(- \int_t^T r_s ds \right) \mid \mathcal{F}_t \right].$$

在此框架下我们有

$$\begin{aligned} \exp \left(- \int_0^t r_s ds \right) P(t, T) &= \exp \left(- \int_0^t r_s ds \right) \mathbb{E}_Q \left[\exp \left(- \int_t^T r_s ds \right) \mid \mathcal{F}_t \right] \\ &= \mathbb{E}_Q \left[\exp \left(- \int_0^t r_s ds \right) \exp \left(- \int_t^T r_s ds \right) \mid \mathcal{F}_t \right] \\ &= \mathbb{E}_Q \left[\exp \left(- \int_0^T r_s ds \right) \mid \mathcal{F}_t \right], \end{aligned}$$

通过条件期望的塔式法则可知它是一个 Q 鞅，参见附录 A:

$$\mathbb{E}_Q \left[\mathbb{E}_Q \left[\exp \left(- \int_0^T r_s ds \right) \mid \mathcal{F}_t \right] \mid \mathcal{F}_u \right] = \mathbb{E}_Q \left[\exp \left(- \int_0^T r_s ds \right) \mid \mathcal{F}_u \right],$$

$0 < u < t$. 回顾在关系式 (5.1)中，瞬时远期利率 $f(t, s)$ 满足

$$P(t, T) = \exp \left(- \int_t^T f(t, s) ds \right),$$

因此

$$\exp \left(- \int_0^t r_s ds \right) P(t, T) = \exp \left(- \int_0^t r_s ds - \int_t^T f(t, s) ds \right) \quad (6.6)$$

是一个 Q 鞅， $0 \leq t \leq T$.

由短期利率 $(r_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ 的马氏性，上式可以改写为

$$\begin{aligned} P(t, T) &= \mathbb{E}_Q \left[\exp \left(- \int_t^T r_s ds \right) \mid r_t \right] \\ &= F(t, r_t). \end{aligned}$$

由伊藤计算和鞅性，上式可得 4章中 $F(t, x)$ 所满足的偏微分方程。

在此我们再次用相同的策略：

1. 用伊藤计算对(6.6)进行求导。
2. 由于(6.6)在无套利条件下是一个鞅，我们可令它的微分项等于零。

由伊藤计算我们有

$$\begin{aligned}
 d_t e^{-X_t} &= -e^{-X_t} d_t X_t + \frac{1}{2} e^{-X_t} (d_t X_t)^2 \\
 &= -e^{-X_t} d_t X_t + \frac{1}{2} e^{-X_t} \left(\int_t^T \sigma(t, s) ds \right)^2 dt \\
 &= -e^{-X_t} \left(-r_t dt + \int_t^T \alpha(t, s) ds dt + \int_t^T \sigma(t, s) ds dB_t \right) \\
 &\quad + \frac{1}{2} e^{-X_t} \left(\int_t^T \sigma(t, s) ds \right)^2 dt,
 \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}
 d_t \exp \left(- \int_0^t r_s ds - \int_t^T f(t, s) ds \right) &= d_t \exp \left(- \int_0^t r_s ds - X_t \right) \\
 &= -r_t \exp \left(- \int_0^t r_s ds - X_t \right) dt \\
 &\quad + \exp \left(- \int_0^t r_s ds \right) d_t e^{-X_t} \\
 &= -r_t \exp \left(- \int_0^t r_s ds - X_t \right) dt \\
 &\quad - \exp \left(- \int_0^t r_s ds - X_t \right) d_t X_t \\
 &\quad + \frac{1}{2} \exp \left(- \int_0^t r_s ds - X_t \right) \left(\int_t^T \sigma(t, s) ds \right)^2 dt \\
 &= -r_t \exp \left(- \int_0^t r_s ds - X_t \right) dt \\
 &\quad - \exp \left(- \int_0^t r_s ds - X_t \right) \left(-r_t dt + \int_t^T \alpha(t, s) ds dt + \int_t^T \sigma(t, s) ds dB_t \right) \\
 &\quad + \frac{1}{2} \exp \left(- \int_0^t r_s ds - X_t \right) \left(\int_t^T \sigma(t, s) ds \right)^2 dt \\
 &= - \exp \left(- \int_0^t r_s ds - X_t \right) \left(\int_t^T \alpha(t, s) ds dt + \int_t^T \sigma(t, s) ds dB_t \right) \\
 &\quad + \frac{1}{2} \exp \left(- \int_0^t r_s ds - X_t \right) \left(\int_t^T \sigma(t, s) ds \right)^2 dt.
 \end{aligned}$$

这样上述过程的鞅性就意味着

$$\int_t^T \alpha(t, s) ds = \frac{1}{2} \left(\int_t^T \sigma(t, s) ds \right)^2.$$

对上述关系式关于 T 求导，我们有

$$\alpha(t, T) = \sigma(t, T) \int_t^T \sigma(t, s) ds, \quad (6.7)$$

这就是所谓的 *HJM* 无套利条件, cf. [HJM92].

作为关系式 (6.7) 的一个结果，定义瞬时远期利率 $f(t, T)$ 的随机微分方程可改写为

$$d_t f(t, T) = \sigma(t, T) \left(\int_t^T \sigma(t, s) ds \right) dt + \sigma(t, T) dB_t,$$

且用积分形式有

$$\begin{aligned} f(t, T) &= f(0, T) + \int_0^t \alpha(s, T) ds + \int_0^t \sigma(s, T) dB_s \\ &= f(0, T) + \int_0^t \sigma(s, T) \int_s^T \sigma(s, u) du ds + \int_0^t \sigma(s, T) dB_s. \end{aligned} \quad (6.8)$$

§6.5 短期利率的马氏性

如前面提到的，短期利率的马氏性在推导关于 $P(t, T) = F(t, r_t)$ 的偏微分方程时是非常重要的。因此很自然会想到：

-在HJM模型中什么时候短期利率模型具有鞅性？

回顾在HJM模型中由关系式 (6.8)，短期利率过程可由下式给出

$$r_t = f(t, t) = f(0, t) + \int_0^t \sigma(s, t) \int_s^t \sigma(s, u) du ds + \int_0^t \sigma(s, t) dB_s.$$

总的来说，形如

$$t \mapsto Z_t := \int_0^t \sigma(s, t) dB_s, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad (6.9)$$

的过程可能 不是一个马氏过程因为 $\sigma(s, t)$ 依赖于变量 t ，其中 $s \mapsto \sigma(s, t)$ 是 $\mathcal{F}_s$ -适应的。

实际上我们有

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E} \left[Z_t \mid \mathcal{F}_u \right] &= \mathbb{E} \left[\int_0^t \sigma(s, t) dB_s \mid \mathcal{F}_u \right] \\
 &= \mathbb{E} \left[\int_0^u \sigma(s, t) dB_s + \int_u^t \sigma(s, t) dB_s \mid \mathcal{F}_u \right] \\
 &= \mathbb{E} \left[\int_0^u \sigma(s, t) dB_s \mid \mathcal{F}_u \right] + \mathbb{E} \left[\int_u^t \sigma(s, t) dB_s \mid \mathcal{F}_u \right] \\
 &= \mathbb{E} \left[\int_0^u \sigma(s, t) dB_s \mid \mathcal{F}_u \right] \\
 &= \int_0^u \sigma(s, t) dB_s,
 \end{aligned}$$

其中用到 1 章的关系式 (1.6)。

由于马氏性，上式应仅依赖于 u, t 和

$$Z_u = \int_0^u \sigma(s, u) dB_s,$$

这是由上述推导隐含的性质得到的。

无论如何，定义为 (6.9) 的 Z_t 的马氏性确实在 $\sigma(t, T)$ 的一些特定情况下是成立的。例如，在

$$\sigma(s, t) = e^{-b(t-s)}$$

的情形下，由 Vasicek 模型有精确解可知，有

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E} \left[Z_t \mid \mathcal{F}_u \right] &= \int_0^u \sigma(s, t) dB_s \\
 &= \int_0^u e^{-b(t-s)} dB_s \\
 &= e^{-b(t-u)} \int_0^u e^{-b(u-s)} dB_s \\
 &= e^{-b(t-u)} Z_u,
 \end{aligned}$$

参见 (4.8).

更一般地，在乘积条件

$$\sigma(s, t) = \xi(s)\psi(t), \quad 0 \leq s \leq t, \quad (6.10)$$

下，其中 $\xi(s)$ 和 $\psi(t)$ 是两个确定的函数，马氏性在形如下式的随机积分过程中也是成立的

$$t \mapsto \int_0^t \sigma(s, t) dB_s.$$

实际上我们有

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [Z_t \mid \mathcal{F}_u] &= \int_0^u \sigma(s, t) dB_s \\ &= \psi(t) \int_0^u \xi(s) dB_s \\ &= \frac{\psi(t)}{\psi(u)} \int_0^u \psi(u) \xi(s) dB_s \\ &= \frac{\psi(t)}{\psi(u)} Z_u, \quad 0 \leq u \leq t. \end{aligned}$$

回顾在Vasicek模型中我们有 $\sigma(s, t) = \sigma e^{-b(t-s)}$, $0 \leq s \leq t$, 因此条件 (6.10) 成立且短期利率确实是一个马氏过程。

§6.6 Hull–White 模型

现在我们的目标是要得到一个随机微分方程使得在波动系数 $\sigma(s, t)$ 的乘积假设(6.10)条件下，在马氏HJM模型中的短期利率过程 $(r_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ 能满足。这样我们就可得到在 §3.3章描述的时间相依Hull–White 短期利率模型。

由 (6.4) 和HJM条件 (6.7)，或直接由(6.8)，我们有

$$\begin{aligned} r_t &= f(t, t) \\ &= f(0, t) + \int_0^t \sigma(s, t) \int_s^t \sigma(s, u) du ds + \int_0^t \sigma(s, t) dB_s \\ &= f(0, t) + \int_0^t \xi(s) \psi(t) \int_s^t \xi(s) \psi(u) du ds + \psi(t) \int_0^t \xi(s) dB_s, \end{aligned}$$

因此

$$r_t = U(t) + \psi(t) \int_0^t \xi(s) dB_s, \quad (6.11)$$

其中

$$U(t) = f(0, t) + \psi(t) \int_0^t \xi^2(s) \int_s^t \psi(u) du ds.$$

运用关系式

$$\int_0^t \xi(s) dB_s = \frac{r_t - U(t)}{\psi(t)}$$

这就可得 (6.11), 我们有

$$\begin{aligned} dr_t &= U'(t)dt + \psi'(t) \left(\int_0^t \xi(s) dB_s \right) dt + \psi(t) \xi(t) dB_t \\ &= U'(t)dt + (r_t - U(t)) \frac{\psi'(t)}{\psi(t)} dt + \psi(t) \xi(t) dB_t, \end{aligned}$$

这实际上表明了作为随机微分方程的解, 短期利率过程 $(r_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ 是具有马氏性的, 参见性质 4.1。

上述等式是属于形如下式的短期利率体系[HW90]

$$dr_t = (a(t) - b(t)r_t)dt + \sigma(t)dB_t,$$

参见 §3.3 节, 这可被看成是一个时间相依的Vasicek模型, 有精确解

$$r_t = r_s e^{-\int_s^t b(\tau) d\tau} + \int_s^t e^{-\int_u^t b(\tau) d\tau} a(u) du + \int_s^t \sigma(u) e^{-\int_u^t b(\tau) d\tau} dB_u,$$

$$0 \leq s \leq t.$$

§6.7 练习

练习 6.1. (练习 5.1 续).

1. 推导瞬时远期利率 $f(t, T)$ 所满足的方程。
2. 证明HJM无套利条件(6.7)在这个方程中成立。

练习 6.2. (练习 5.2 续).

1. 推导瞬时远期利率 $f(t, T)$ 所满足的随机微分方程。
2. 证明HJM无套利条件(6.7)在问题 1 的方程中成立。

第七章 远期测度和衍生产品定价

本章中我们将介绍在远期测度下定价利率衍生产品。我们将通过Girsanov定理和在Vasicek模型下的精确计算来得到在远期测度下的短期利率过程的演变方程。

§7.1 远期测度

在无风险账户收益为瞬时短期利率 r_t 的标准的Black-Scholes框架下, 损益为 F 到期日为 T 的未定权益在时刻 t 的价格可通过在风险中性测度 $\mathbb{Q}$ 下的条件期望计算为

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_t^T r_s ds} F \mid \mathcal{F}_t \right].$$

当利率过程 $(r_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ 是关于时间的确定函数时, 上述表达式可写为

$$e^{-\int_t^T r_s ds} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[F \mid \mathcal{F}_t],$$

并且当 $(r_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ 等于一个确定的常数 r 时, 即可得到以下著名的表达式

$$e^{-(T-t)r} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[F \mid \mathcal{F}_t].$$

在大部分的利率模型中短期利率 $(r_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ 是一个随机过程, 因此上述的操作并不可行, 这就意味着我们得考虑计算以下的表达式

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_t^T r_s ds} F \mid \mathcal{F}_t \right] \quad (7.1)$$

其中 $(r_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ 将是一个随机过程, 这相比在2章的标准Black-Scholes框架下就更复杂了。

注意到当计算4章中的债券价格时, 我们已经计算过形如常数损益 $F = 1$ 情形下的偏微分方程解的表达式了。在随机损益 F 形式为 $F = h(f(T, T, S))$ 时-即即时远期利率 $f(T, T, S)$ 的期权-要计算(7.1)就要知道 $\int_t^T r_s ds$ 和 $f(T, T, S)$ 的联合分布, 这也增加了计算的复杂程度。

如在§4.2章中所选一样, 我们设 $\mathbb{Q} = \mathbb{P}$ 且假设在 $\mathbb{P}$ 下市场是无套利的, 也就是说

$$t \mapsto e^{-\int_0^t r_s ds} P(t, T), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (7.2)$$

在 $\mathbb{P}$ 下是一个 $\mathcal{F}_t$ -鞅。

定义 7.1. 远期测度 是定义为

$$\frac{d\tilde{\mathbb{P}}}{d\mathbb{P}} = \frac{1}{P(0, T)} e^{-\int_0^T r_s ds}$$

的概率测度 $\tilde{\mathbb{P}}$ 。

以后在 $\tilde{\mathbb{P}}$ 下的期望将被表示为 $\mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}}$ 。

下一个命题将可被用来在远期测度 $\mathbb{P}$ 未定权益的定价。

命题 7.1. 对于所以充分可积的随机变量 F 我们有

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[F e^{-\int_t^T r_s ds} \mid \mathcal{F}_t \right] = P(t, T) \mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}} [F \mid \mathcal{F}_t], \quad 0 \leq t \leq T. \quad (7.3)$$

证明. 实际上¹, 对于任意有界且 $\mathcal{F}_t$ -可测的随机变量 G , 我们有

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[G F e^{-\int_t^T r_s ds} \right] &= P(0, T) \mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}} \left[G e^{\int_0^t r_s ds} F \right] \\ &= P(0, T) \mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}} \left[G e^{\int_0^t r_s ds} \mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}} [F \mid \mathcal{F}_t] \right] \\ &= P(0, T) \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\frac{d\tilde{\mathbb{P}}}{d\mathbb{P}} G e^{\int_0^t r_s ds} \mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}} [F \mid \mathcal{F}_t] \right] \\ &= P(0, T) \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\frac{1}{P(0, T)} e^{-\int_0^T r_s ds} G e^{\int_0^t r_s ds} \mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}} [F \mid \mathcal{F}_t] \right] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[G e^{-\int_t^T r_s ds} \mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}} [F \mid \mathcal{F}_t] \right] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}} [G P(t, T) \mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}} [F \mid \mathcal{F}_t]], \end{aligned}$$

其中最后一个等号可通过下式得到

$$P(t, T) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[e^{-\int_t^T r_s ds} \mid \mathcal{F}_t \right]. \quad (7.4)$$

□

¹对于所有的有界且 $\mathcal{F}_t$ -可测的 G , 我们利用特性 $X = \mathbb{E}[F \mid \mathcal{F}_t] \Leftrightarrow \mathbb{E}[GX] = \mathbb{E}[GF]$, 参见附录 A中的关系式 (11.3).

作为上述命题的结果，计算 $\mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[F e^{-\int_t^T r_s ds} \mid \mathcal{F}_t \right]$ 可通过在远期测度 $\tilde{\mathbb{P}}$ 计算 $P(t, T) \mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}} [F \mid \mathcal{F}_t]$.

而作为命题 7.1 的推论，下一引理将告诉我们在条件 $\mathcal{F}_t$ 下的密度 $d\tilde{\mathbb{P}}/d\mathbb{P}$. 由其定义可知

$$\Lambda_t := \frac{d\tilde{\mathbb{P}}|_{\mathcal{F}_t}}{d\mathbb{P}|_{\mathcal{F}_t}}, \quad 0 \leq t \leq T,$$

是唯一满足下式的随机变量

$$\mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}} [F \mid \mathcal{F}_t] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[F \Lambda_t \mid \mathcal{F}_t \right],$$

即对所有的有界随机变量 F ,

$$\int_{\Omega} F d\tilde{\mathbb{P}}|_{\mathcal{F}_t} = \int_{\Omega} F \Lambda_t d\mathbb{P}|_{\mathcal{F}_t}.$$

引理 7.1. 我们有

$$\frac{d\tilde{\mathbb{P}}|_{\mathcal{F}_t}}{d\mathbb{P}|_{\mathcal{F}_t}} = \frac{e^{-\int_t^T r_s ds}}{P(t, T)}, \quad t \in [0, T]. \quad (7.5)$$

证明. 对所有的有界可测 F , 将(7.3)改写为

$$\mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}} [F \mid \mathcal{F}_t] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[F \frac{e^{-\int_t^T r_s ds}}{P(t, T)} \mid \mathcal{F}_t \right], \quad t \in [0, T],$$

这意味着(7.5)成立。 □

注意到 $\frac{d\tilde{\mathbb{P}}|_{\mathcal{F}_t}}{d\mathbb{P}|_{\mathcal{F}_t}}$ 是不等于 $\mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\frac{d\tilde{\mathbb{P}}}{d\mathbb{P}} \mid \mathcal{F}_t \right]$ 的，实际上由假设(7.2)我们有

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\frac{d\tilde{\mathbb{P}}}{d\mathbb{P}} \mid \mathcal{F}_t \right] &= \frac{1}{P(0, T)} \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[e^{-\int_0^T r_s ds} \mid \mathcal{F}_t \right] \\ &= \frac{P(t, T)}{P(0, T)} e^{-\int_0^t r_s ds}, \quad 0 \leq t \leq T. \end{aligned} \quad (7.6)$$

除此之外我们还得到一下的结果。

命题 7.2. 对于所有的 $S, T \geq 0$, 过程

$$t \mapsto \frac{P(t, S)}{P(t, T)}, \quad 0 \leq t \leq S \wedge T,$$

在 $\tilde{\mathbb{P}}$ 下是一个 $\mathcal{F}_t$ -鞅。

证明. 对于所有有界且 $\mathcal{F}_s$ -可测的随机变量 F , 由关系式 (7.6) 我们有: ²

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}} \left[F \frac{P(t, S)}{P(t, T)} \right] &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[F \frac{e^{-\int_0^T r_u du}}{P(0, T)} \frac{P(t, S)}{P(t, T)} \right] \\ &= \frac{1}{P(0, T)} \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[F e^{-\int_0^t r_u du} P(t, S) \right] \\ &= \frac{1}{P(0, T)} \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[F e^{-\int_0^s r_u du} P(s, S) \right] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[F \frac{e^{-\int_0^T r_u du}}{P(0, T)} \frac{P(s, S)}{P(s, T)} \right] \\ &= \mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}} \left[F \frac{P(s, S)}{P(s, T)} \right], \end{aligned}$$

hence

$$\mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}} \left[\frac{P(t, S)}{P(t, T)} \mid \mathcal{F}_s \right] = \frac{P(s, S)}{P(s, T)}.$$

□

§7.2 远期测度下的演变过程

为了应用命题 7.1 且通过计算

$$P(t, T) \mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}} [F \mid \mathcal{F}_t],$$

来计算价格 $\mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}} \left[e^{-\int_t^T r_s ds} F \mid \mathcal{F}_t \right]$ 就要确定在远期测度 $\tilde{\mathbb{P}}$ 下, 模型所包含的过程 r_t , $f(t, T, S)$, 和 $P(t, T)$ 的变化情况。

为此我们将假设在测度 $\mathbb{P}$ 下, $P(t, T)$ 的变化服从

$$\frac{dP(t, T)}{P(t, T)} = r_t dt + \zeta_t dB_t, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (7.7)$$

²对于所有有界且 $\mathcal{F}_t$ -可测的 G , 我们利用特性 $X = \mathbb{E}[F \mid \mathcal{F}_t] \Leftrightarrow \mathbb{E}[GX] = \mathbb{E}[GF]$, 参见附录 A 的关系式 (11.3).

其中 $(B_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ 是一个在 $\mathbb{P}$ 下的标准布朗运动 并且 $(r_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ 和 $(\zeta(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ 是关于由 $(B_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ 产生的信息流 $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ 的适应过程。

对(7.7)应用伊藤计算可得到

$$d \left(e^{-\int_0^t r_s ds} P(t, T) \right) = \zeta_t \left(e^{-\int_0^t r_s ds} P(t, T) \right) dB_t, \quad (7.8)$$

这与以下事实：在 $\mathbb{P}$ 下

$$t \mapsto e^{-\int_0^t r_s ds} P(t, T) \quad (7.9)$$

是一个鞅一致，参见命题 7.2 和推论 1.1。

为了确定在测度 $\tilde{\mathbb{P}}$ 下隐含过程的变化规律 我们将以下由Girsanov定理得到的命题。

命题 7.3. 过程

$$\tilde{B}_t := B_t - \int_0^t \zeta_s ds, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (7.10)$$

在 $\tilde{\mathbb{P}}$ 下是一个标准的布朗运动。

证明. 设

$$\begin{aligned} \Psi(t) &= \mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}} \left[\frac{d\tilde{\mathbb{P}}}{d\mathbb{P}} \mid \mathcal{F}_t \right] \\ &= \frac{1}{P(0, T)} \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[e^{-\int_0^T r_s ds} \mid \mathcal{F}_t \right] \\ &= \frac{P(t, T)}{P(0, T)} e^{-\int_0^t r_s ds}, \quad 0 \leq t \leq T, \end{aligned}$$

等式 (7.8) 可被改写为

$$d\Psi(t) = \Psi(t) \zeta_t dB_t,$$

这将可解为

$$\Psi(t) = \exp \left(\int_0^t \zeta_s dB_s - \frac{1}{2} \int_0^t |\zeta_s|^2 ds \right),$$

因此

$$\mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}} \left[\frac{d\tilde{\mathbb{P}}}{d\mathbb{P}} \mid \mathcal{F}_T \right] = \Psi(T) = \exp \left(\int_0^T \zeta_s dB_s - \frac{1}{2} \int_0^T |\zeta_s|^2 ds \right),$$

因此由 Girsanov 定理 2.1 就可以得到命题结论。 $\square$

作为命题 7.3 的结论，在 $\tilde{\mathbb{P}}$ 下 $t \mapsto P(t, T)$ 的演变过程可由下式给出

$$\frac{dP(t, T)}{P(t, T)} = r_t dt + |\zeta_t|^2 dt + \zeta_t d\tilde{B}_t,$$

其中 $(\tilde{B}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ 是一个在 $\tilde{\mathbb{P}}$ 下的标准布朗运动同时我们有

$$d\left(e^{-\int_0^t r_s ds} P(t, T)\right) = |\zeta_t|^2 e^{-\int_0^t r_s ds} P(t, T) dt + \zeta_t e^{-\int_0^t r_s ds} P(t, T) d\tilde{B}_t.$$

对于两个到期日分别为 T 和 S 的债券，其价格 $P(t, T)$ 和 $P(t, S)$ 分别满足

$$\frac{dP(t, T)}{P(t, T)} = r_t dt + \zeta_t^T dB_t,$$

和

$$\frac{dP(t, S)}{P(t, S)} = r_t dt + \zeta_t^S dB_t,$$

由伊藤公式得到

$$\begin{aligned} d\left(\frac{P(t, S)}{P(t, T)}\right) &= \frac{P(t, S)}{P(t, T)} (\zeta_t^S(t) - \zeta_t^T(t)) (dB_t - \zeta_t^T(t) dt) \\ &= \frac{P(t, S)}{P(t, T)} (\zeta_t^S(t) - \zeta_t^T(t)) d\tilde{B}_t, \end{aligned} \quad (7.11)$$

其中 $(\tilde{B}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ 是 $\tilde{\mathbb{P}}$ 下的一个标准布朗运动，因此由命题 7.10，可得到在命题 7.2 中所提到的 $P(t, S)/P(t, T)$ 的鞅性。

在短期利率过程 $(r_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ 是马氏过程且为下一方程

$$dr_t = \mu(t, r_t) dt + \sigma(t, r_t) dB_t$$

的解的情形下，在测度 $\tilde{\mathbb{P}}$ 下它的演变过程可由下式给出

$$dr_t = \mu(t, r_t) dt + \sigma(t, r_t) \zeta_t dt + \sigma(t, r_t) d\tilde{B}_t.$$

回顾在马氏情形下，债券价格 $P(t, T)$ 可被表示为

$$\begin{aligned} P(t, T) &= \mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}} \left[F e^{-\int_t^T r_s ds} \mid \mathcal{F}_t \right] \\ &= \mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}} \left[F e^{-\int_t^T r_s ds} \mid r_t \right] \end{aligned}$$

$$= F(t, r_t),$$

即它就是一个关于 t 的 $F(t, r_t)$ 和 r_t 的函数。由伊藤公式可得

$$d\left(e^{-\int_0^t r_s ds} P(t, T)\right) = e^{-\int_0^t r_s ds} \sigma(t, r_t) \frac{\partial F}{\partial x}(t, r_t) dB_t,$$

由[Pro05]中的推论 II-1, 在关于 dt 的和中的所有项在上述表达式中都消失了因为

$$t \mapsto e^{-\int_0^t r_s ds} P(t, T) = e^{-\int_0^t r_s ds} F(t, r_t),$$

是一个在 $\mathbb{P}$ 下的鞅, 这可由(7.9) 或者命题 7.2得到。

因此 $(P(t, T))_{t \in [0, T]}$ 的演变过程可由下式给出

$$\begin{aligned} \frac{dP(t, T)}{P(t, T)} &= r_t dt + \sigma(t, r_t) \frac{1}{P(t, T)} \frac{\partial F}{\partial x}(t, r_t) dB_t \\ &= r_t dt + \sigma(t, r_t) \frac{1}{F(t, r_t)} \frac{\partial F}{\partial x}(t, r_t) dB_t \\ &= r_t dt + \sigma(t, r_t) \frac{\partial \log F}{\partial x}(t, r_t) dB_t, \end{aligned}$$

并且在(7.7)中的过程 $(\zeta_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ 为

$$\zeta_t = \sigma(t, r_t) \frac{\partial \log F}{\partial x}(t, r_t), \quad 0 \leq t \leq T.$$

作为一个例子, 在 $\sigma(t, x)$ 等于常数 σ 的Vasicek模型中, 其中 价格 $P(t, T)$ 具有以下形式

$$P(t, T) = F(t, r_t) = e^{C(T-t)r_t + A(T-t)},$$

其中

$$C(T-t) = -\frac{1}{b}(1 - e^{-b(T-t)}),$$

因此

$$\log F(t, r_t) = C(T-t)r_t + A(T-t),$$

并且

$$\zeta_t = \sigma C(T-t) = -\frac{\sigma}{b}(1 - e^{-b(T-t)}).$$

§7.3 衍生产品的定价

利用上述框架现在我们可以由等式

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[e^{-\int_t^T r_s ds} F \mid \mathcal{F}_t \right] = P(t, T) \mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}} \left[F \mid \mathcal{F}_t \right]$$

和在概率测度 $\tilde{\mathbb{P}}$ 下 r_t 的演变过程来 计算损益为 F 到期日为 T 的未定权益在时刻 t 的价格。

现在我们考虑关于 $P(T, S)$ 的损益 为

$$F = (P(T, S) - K)^+$$

价格为

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[e^{-\int_t^T r_s ds} (P(T, S) - K)^+ \mid \mathcal{F}_t \right] = P(t, T) \mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}} \left[(P(T, S) - K)^+ \mid \mathcal{F}_t \right]$$

的买入债券期权, 其中 对于所有的 $T > 0$, $P(t, T)$ 由

$$\frac{dP(t, T)}{P(t, T)} = r_t dt + \zeta_t^T dB_t, \quad 0 \leq t \leq T$$

给出。

由 (7.11) 我们有

$$P(T, S) = \frac{P(t, S)}{P(t, T)} \exp \left(\int_t^T (\zeta^S(s) - \zeta^T(s)) d\tilde{B}_s - \frac{1}{2} \int_t^T |\zeta^S(s) - \zeta^T(s)|^2 ds \right),$$

因此当对所有 $T > 0$ $(\zeta^T(s))_{s \in [0, T]}$ 是确定时, 我们得到

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[e^{-\int_t^T r_s ds} (P(T, S) - K)^+ \mid \mathcal{F}_t \right] \\ &= P(t, T) \mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}} \left[\left(\frac{P(t, S)}{P(t, T)} \exp \left(X - \frac{1}{2} \int_t^T |\zeta^S(s) - \zeta^T(s)|^2 ds \right) - K \right)^+ \mid \mathcal{F}_t \right] \\ &= P(t, T) \mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}} \left[(e^{X+m(t, T, S)} - K)^+ \mid \mathcal{F}_t \right], \end{aligned}$$

其中 X 是一个中心高斯随机变量, 且已知 $\mathcal{F}_t$ 时 方差为

$$v^2(t, T, S) = \int_t^T |\zeta^S(s) - \zeta^T(s)|^2 ds,$$

并且

$$m(t, T, S) = -\frac{1}{2}v^2(t, T, S) + \log \frac{P(t, S)}{P(t, T)}.$$

回顾在引理 2.3 中, 其中 X 是一个中心高斯随机变量 方差为 v^2 , 且和在标准 Black-Scholes 公式一样, 期望 $(e^{m+X} - K)^+$ 由

$$\mathbb{E}[(e^{m+X} - K)^+] = e^{m+\frac{v^2}{2}} \Phi(v + (m - \log K)/v) - K \Phi((m - \log K)/v),$$

其中

$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^z e^{-y^2/2} \frac{dy}{\sqrt{2\pi}}, \quad z \in \mathbb{R},$$

给出, 在表示高斯分布函数时为了记号的简洁 我们丢掉指标 $m(t, T, S)$ 和 $v^2(t, T, S)$ 中的 t, T, S

接下来我们有

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[e^{-\int_t^T r_s ds} (P(T, S) - K)^+ \mid \mathcal{F}_t \right] \\ &= P(t, S) \Phi \left(\frac{v}{2} + \frac{1}{v} \log \frac{P(t, S)}{K P(t, T)} \right) - K P(t, T) \Phi \left(-\frac{v}{2} + \frac{1}{v} \log \frac{P(t, S)}{K P(t, T)} \right). \end{aligned} \quad (7.12)$$

在 Vasicek 模型中我们有

$$dr_t = (a - br_t)dt + \sigma dB_t,$$

和

$$\zeta_t = \sigma C(T - t) = -\frac{\sigma}{b}(1 - e^{-b(T-t)}),$$

因此 v 由

$$v^2(t, T, S) = \frac{\sigma^2}{b^2} \int_t^T (e^{-b(T-s)} - e^{-b(S-s)})^2 ds$$

给出。作为练习, 让我们在 Vasicek 模型下通过 $\tilde{\mathbb{P}}$ 下分别为

$$dr_t = (a - br_t)dt - \frac{\sigma^2}{b}(1 - e^{-b(T-t)})dt + \sigma d\tilde{B}_t \quad (7.13)$$

和

$$\frac{dP(t, T)}{P(t, T)} = r_t dt + \frac{\sigma^2}{b^2}(1 - e^{-b(T-t)})^2 dt - \frac{\sigma}{b}(1 - e^{-b(T-t)})d\tilde{B}_t$$

的 r_t 和 $P(t, T)$ 的演变过程和独立的计算重新得到 (7.12)

方程 (7.13) 可解为

$$\begin{aligned} r_t &= r_s e^{-b(t-s)} + \int_s^t e^{-b(t-u)} (a + \sigma^2 C(T-u)) du + \sigma \int_s^t e^{-b(t-u)} d\tilde{B}_u \\ &= \mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}}[r_t \mid \mathcal{F}_s] + \sigma \int_s^t e^{-b(t-u)} d\tilde{B}_u, \end{aligned}$$

因此由命题 1.2, 在 $\tilde{\mathbb{P}}$ 下 r_t 的条件均值 和方差为

$$\mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}}[r_t \mid \mathcal{F}_s] = r_s e^{-b(t-s)} + \int_s^t e^{-b(t-u)} (a + \sigma^2 C(T-u)) du$$

和

$$\begin{aligned} \text{Var}_{\tilde{\mathbb{P}}}[r_t \mid \mathcal{F}_s] &= \mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}}[(r_t - \mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}}[r_t \mid \mathcal{F}_s])^2 \mid \mathcal{F}_s] \\ &= \frac{\sigma^2}{2b} (1 - e^{-2b(t-s)}). \end{aligned}$$

因此关于 $P(T, S)$ 的买入期权的价格为

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[e^{-\int_t^T r_s ds} (P(T, S) - K)^+ \mid \mathcal{F}_t \right] &= P(t, T) \mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}} \left[(P(T, S) - K)^+ \mid \mathcal{F}_t \right] \\ &= P(t, T) \mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}} \left[(F(T, r_T) - K)^+ \mid \mathcal{F}_t \right] \\ &= P(t, T) \mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}} \left[(e^{A(S-T) + r_T C(S-T)} - K)^+ \mid \mathcal{F}_t \right] \\ &= P(t, T) \mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}} \left[(e^{m(t, T, S) + X} - K)^+ \mid \mathcal{F}_t \right] \end{aligned}$$

其中在给定 $\mathcal{F}_t$, X 是一个中心高斯随机变量方差为

$$\begin{aligned} v^2(t, T, S) &= \text{Var}_{\tilde{\mathbb{P}}}[C(S-T)r_T \mid \mathcal{F}_t] \\ &= C^2(S-T) \text{Var}_{\tilde{\mathbb{P}}}[r_T \mid \mathcal{F}_t] \\ &= \frac{\sigma^2}{2b} C^2(S-T) (1 - e^{-2b(T-t)}) \end{aligned}$$

并且

$$\begin{aligned} \tilde{m}(t, T, S) &= A(S-T) + C(S-T) \mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}}[r_T \mid \mathcal{F}_t] \\ &= A(S-T) + C(S-T) \left(r_t e^{-b(T-t)} + \int_t^T e^{-b(T-u)} (a + \sigma C(T-u)) du \right), \end{aligned}$$

其中

$$A(S-T) = \frac{4ab - 3\sigma^2}{4b^3} + \frac{\sigma^2 - 2ab}{2b^2}(S-T) + \frac{\sigma^2 - ab}{b^3}e^{-b(S-T)} - \frac{\sigma^2}{4b^3}e^{-2b(S-T)}.$$

由于从命题 7.2 可知

$$t \mapsto \frac{P(t, S)}{P(t, T)}, \quad 0 \leq t \leq T \leq S,$$

是在 $\tilde{\mathbb{P}}$ 下的一个鞅, 我们有

$$\begin{aligned} \frac{P(t, S)}{P(t, T)} &= \mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}} \left[P(T, S) \mid \mathcal{F}_t \right] \\ &= \mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}} \left[e^{A(S-T) + r_T C(S-T)} \mid \mathcal{F}_t \right] \\ &= e^{A(S-T) + C(S-T)} \mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}} [r_T | \mathcal{F}_t] + \frac{1}{2} C^2(S-T) \text{Var}_{\tilde{\mathbb{P}}} [r_T | \mathcal{F}_t] \\ &= e^{\tilde{m}(t, T, S) + \frac{1}{2} v^2(t, T, S)}. \end{aligned} \quad (7.14)$$

上述的不显然的关系式 (7.14) 实际上可以手算验证³:

$$\begin{aligned} -v^2/2 + \log(P(t, S)/P(t, T)) &= -v^2/2 + \log P(t, S) - \log P(t, T) \\ &= -v^2/2 + A(S-t) + r_t C(S-t) - (A(T-t) + r_t C(T-t)) \\ &= -v^2/2 + A(S-t) - A(T-t) + r_t (C(S-t) - C(T-t)) \\ &= -\frac{\sigma^2}{4b} C^2(S-T)(1 - e^{-2b(T-t)}) \\ &\quad + A(S-t) - A(T-t) + r_t C(S-T)e^{-b(T-t)} \\ &= A(S-T) \\ &\quad + C(S-T) \left(r_t e^{-b(T-t)} + \int_t^T e^{-b(T-u)} (a + \sigma^2 C(T-u)) du \right) \\ &= \tilde{m}(t, T, S). \end{aligned}$$

最终我们得到

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[e^{-\int_t^T r_s ds} (P(T, S) - K)^+ \mid \mathcal{F}_t \right] &= P(t, T) \mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}} \left[(e^{\tilde{m}(t, T, S) + X} - K)^+ \mid r_t \right] \\ &= P(t, T) e^{\tilde{m} + v^2/2} \Phi(v + (\tilde{m} - \log K)/v) - K P(t, T) \Phi((\tilde{m} - \log K)/v) \\ &= P(t, S) \Phi(v + (\tilde{m} - \log K)/v) - K P(t, T) \Phi((\tilde{m} - \log K)/v) \\ &= P(t, S) \Phi \left(\frac{1}{v} \log \frac{P(t, S)}{K P(t, T)} + \frac{v}{2} \right) - K P(t, T) \Phi \left(\frac{1}{v} \log \frac{P(t, S)}{K P(t, T)} - \frac{v}{2} \right), \end{aligned}$$

如 [BM06] 76 页所述.

³这可能会费花大量的时。

§7.4 测度逆变换

作为参考，在本节中我们给出在后面将要用到条件逆变换密度的计算。

命题 7.4. 我们有

$$\mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}} \left[\frac{d\mathbb{P}}{d\tilde{\mathbb{P}}} \mid \mathcal{F}_t \right] = \frac{P(0, T)}{P(t, T)} \exp \left(\int_0^t r_s ds \right) \quad 0 \leq t \leq T, \quad (7.15)$$

并且过程

$$t \mapsto \frac{1}{P(t, T)} \exp \left(\int_0^t r_s ds \right), \quad 0 \leq t \leq T,$$

是 $\tilde{\mathbb{P}}$ 下的 $\mathcal{F}_t$ -鞅。

证明. 对于所有的有界和 $\mathcal{F}_t$ -可测的随机变量 F 我们有，利用(7.4)和附录 A 中条件期望的特性(11.3)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}} \left[F \frac{d\mathbb{P}}{d\tilde{\mathbb{P}}} \right] &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}} [F] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[F \frac{P(t, T)}{P(t, T)} \right] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\frac{F}{P(t, T)} \exp \left(- \int_t^T r_s ds \right) \right] \\ &= \mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}} \left[F \frac{P(0, T)}{P(t, T)} \exp \left(\int_0^t r_s ds \right) \right], \end{aligned}$$

其中在最后一行应用定义 7.1 可得。这就得到(7.15). □

由伊藤计算我们从(7.7)得到:

$$d \left(\frac{1}{P(t, T)} \right) = - \frac{1}{P(t, T)} r_t dt - \frac{1}{P(t, T)} \zeta_t (dB_t - \zeta_t dt),$$

和

$$\begin{aligned} d \left(\frac{1}{P(t, T)} \exp \left(\int_0^t r_s ds \right) \right) &= - \frac{\zeta_t}{P(t, T)} \exp \left(\int_0^t r_s ds \right) (dB_t - \zeta_t dt) \\ &= - \frac{1}{P(t, T)} \exp \left(\int_0^t r_s ds \right) \zeta_t d\tilde{B}_t, \end{aligned}$$

这可由命题 7.3 得到命题 7.4 的第二部分，即在 $\tilde{\mathbb{P}}$ 下

$$t \mapsto \frac{1}{P(t, T)} \exp \left(\int_0^t r_s ds \right)$$

的鞅性。

§7.5 练习

练习 7.1. (练习 6.1 续).

1. 推导 $t \mapsto P(t, T)$ 满足的随机微分方程。
2. 推导 $t \mapsto e^{-\int_0^t r_s ds} P(t, T)$ 满足的随机微分方程。
3. 将条件期望

$$\mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}} \left[\frac{d\tilde{\mathbb{P}}}{d\mathbb{P}} \mid \mathcal{F}_t \right]$$

表示为关于 $P(t, T)$, $P(0, T)$ 和 $e^{-\int_0^t r_s ds}$ 的函数。

4. 求出

$$t \mapsto \mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}} \left[\frac{d\tilde{\mathbb{P}}}{d\mathbb{P}} \mid \mathcal{F}_t \right]$$

满足的随机微分方程。

5. 通过求解 4 中的随机微分方程 计算出远期测度关于 $\mathbb{P}$ 的密度 $d\tilde{\mathbb{P}}/d\mathbb{P}$
6. 利用 Girsanov 定理求出在远期测度下 r_t 的随机微分方程。
7. 计算债券买入期权的价格

$$\mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}} \left[e^{-\int_t^T r_s ds} (P(T, S) - K)^+ \right] = P(t, T) \mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}} \left[(P(T, S) - K)^+ \right].$$

练习 7.2. (练习 6.2 续).

1. 计算远期测度 $\tilde{\mathbb{P}}$ 关于 $\mathbb{P}$ 的密度

$$\frac{d\tilde{\mathbb{P}}}{d\mathbb{P}} = \frac{1}{P(0, T)} e^{-\int_0^T r_t dt}.$$

2. 利用Girsanov 定理在远期测度下 r_t 的随机微分方程。
3. 为了计算方便设 $b = 0$, 计算在时刻 $t = 0$ 时的债券 买入期权的价格

$$\mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}} \left[e^{-\int_0^T r_s ds} (P(T, S) - K)^+ \right] = P(0, T) \mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}} \left[(P(T, S) - K)^+ \right].$$

练习 7.3. 我们考虑 Vasicek 短期利率模型

$$dr_t = -br_t dt + \sigma dB_t,$$

其中 $(B_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ 是一个在 $\mathbb{P}$ 下的标准布朗运动。

1. 回顾到期日为 T_1, T_2 的债券价格 $P(t, T_1), P(t, T_2)$ 的动态

$$\frac{dP(t, T_i)}{P(t, T_i)} = r_t dt + \zeta_t^i dB_t, \quad i = 1, 2.$$

2. 回顾远期利率 $f(t, T_1, T_2)$ 的表达式.
3. 计算在满足

$$\frac{d\mathbb{P}_2}{d\mathbb{P}} = \frac{1}{P(0, T_2)} e^{-\int_0^{T_2} r_s ds}.$$

的远期测度 $\mathbb{P}_2$ 下的动态 $f(t, T_1, T_2)$ 。

4. 利用在远期测度 $\mathbb{P}_2$ 下的期望, 计算在时刻 $t \in [0, T_1]$ 的利率上限的价格

$$(T_2 - T_1) \mathbb{E} \left[e^{-\int_t^{T_2} r_s ds} (f(T_1, T_1, T_2) - \kappa)^+ \mid \mathcal{F}_t \right].$$

练习 7.4. (练习 4.5 续). 假设 $(\sigma_t^T)_{t \in [0, T]}$ 和 $(\sigma_t^S)_{t \in [0, S]}$ 是确定的函数, 计算敲定价格为 κ 的债券价格

$$\mathbb{E} \left[e^{-\int_t^T r_s ds} (P(T, S) - \kappa)^+ \mid \mathcal{F}_t \right] = P(t, T) \mathbb{E}_T \left[(P(T, S) - \kappa)^+ \mid \mathcal{F}_t \right].$$

回顾若 X 在给定 $\mathcal{F}_t$ 下是一个中心高斯随机变量均值为 m_t 方差为 v_t^2 ，我们有

$$\mathbb{E}[(e^X - K)^+ | \mathcal{F}_t] = e^{m_t + v_t^2/2} \Phi\left(\frac{v_t}{2} + \frac{1}{v_t}(m_t + v_t^2/2 - \log K)\right) - K \Phi\left(-\frac{v_t}{2} + \frac{1}{v_t}(m_t + v_t^2/2 - \log K)\right)$$

其中 $\Phi(x)$, $x \in \mathbb{R}$ 表示高斯分布函数。

练习 7.5. (练习 5.3 续).

1. 计算远期测度 $\mathbb{P}_T$ 关于 $\mathbb{P}$ 的条件密度

$$\mathbb{E}\left[\frac{d\mathbb{P}_T}{d\mathbb{P}} \mid \mathcal{F}_t\right] = \frac{P(t, T)}{P(0, T)} e^{-\int_0^t r_s^T ds}.$$

2. 证明过程 Show that the process

$$\tilde{B}_t := B_t - \sigma t, \quad 0 \leq t \leq T,$$

是在 $\mathbb{P}_T$ 下的标准布朗运动。 $\tilde{B}$ is a standard Brownian motion under $\mathbb{P}_T$.

3. 计算在 $\mathbb{P}_T$ 下 X_t^S 和 $P(t, S)$ 的动态。

提示: 证明

$$-\mu(S - T) + \sigma(S - T) \int_0^t \frac{1}{S - s} dB_s = \frac{S - T}{S - t} \log P(t, S).$$

4. 计算债券价格

$$\mathbb{E}\left[e^{-\int_t^T r_s^T ds} (P(T, S) - K)^+ \mid \mathcal{F}_t\right] = P(t, T) \mathbb{E}_T\left[(P(T, S) - K)^+ \mid \mathcal{F}_t\right],$$

$$0 \leq t < T < S.$$

第八章 拟合曲线和二元模型

前一章所考虑的短期利率模型是一元模型也就是说其中的随机变化是仅由一个布朗运动所驱动的。这样的模型给拟合远期曲线带来某些局限，并导致了不同到期日的零息债券价格之间的相关性。本章的目的是研究用两个随机源驱动的二元模型，它可使参数有更多的选择去拟合远期曲线。

§8.1 曲线拟合

回顾在Vasicek模型中，瞬时远期模型用Musiela记号($x = T - t$)表示为由下式

$$f(t, T) = \frac{a}{b} - \frac{\sigma^2}{2b^2} + \left(r_t - \frac{a}{b} + \frac{\sigma^2}{b^2} \right) e^{-bx} - \frac{\sigma^2}{2b^2} e^{-2bx}. \quad (8.1)$$

因此

$$\frac{\partial f}{\partial T}(t, T) = e^{-b(T-t)} \left(-br_t + a - \frac{\sigma^2}{b} + \frac{\sigma^2}{b} e^{-b(T-t)} \right),$$

且容易验证 f 的所有倒数的符号最多只能改变一次。结果，在Vasicek模型中可能的远期曲线受限于每条曲线的一次改变规律，如图 8.1对不同的 r_t 所表示的一样。

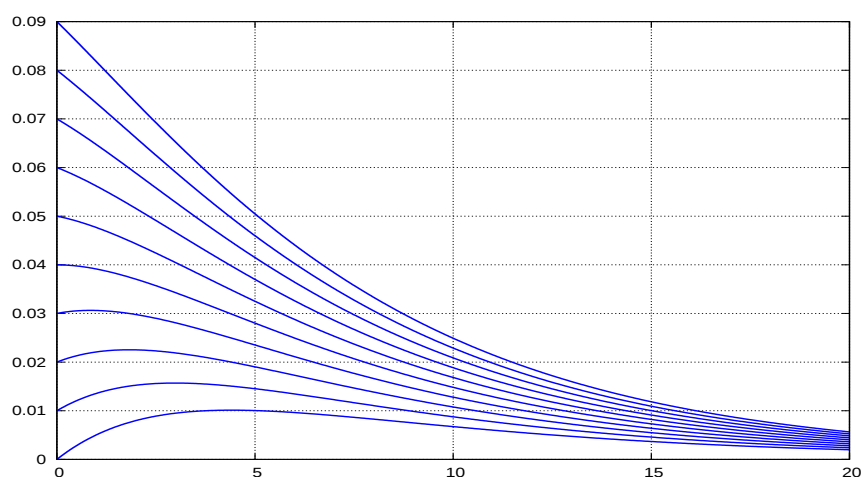


图 8.1: 远期利率的图形.

例如，图 6.3 中短期利率的 Vasicek 路径驱动了 在图 8.2 中所表示的瞬时远期利率，该瞬时远期利率都收敛于“长期利率”

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(t, t+x) = \lim_{T \rightarrow \infty} f(t, T) = \frac{a}{b} - \frac{\sigma^2}{2b^2}$$

当 x 趋于无穷大。

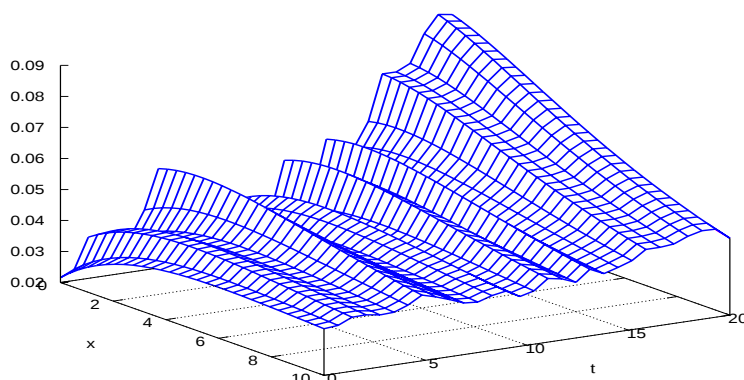


图 8.2: Vasicek 模型中的远期瞬时利率曲线 $(t, x) \mapsto f(t, t+x)$.

由关系式 (8.1) 我们知道在 Vasicek 模型中瞬时远期曲线“存在于”由

$$x \mapsto z_1 + z_2 e^{z_3 x} + z_4 e^{z_5 x} \quad (8.2)$$

其中

$$\begin{cases} z_1 = \frac{a}{b} - \frac{\sigma^2}{2b^2}, \\ z_2 = r_t - \frac{a}{b} + \frac{\sigma^2}{b^2}, \\ z_3 = -b, \\ z_4 = -\frac{\sigma^2}{2b}, \\ z_5 = -2b. \end{cases}$$

所产生的函数空间。然而不幸的是，这个函数空间既不包含于 Nelson-Siegel 空间，也不包含于 Svensson 空间。如 6 章中所提到的，用这些曲线的典型轨道去模拟实际的远期曲线，如 6.4 图并不是很现实，因此，形如

$$x \mapsto g(x) = z_1 + (z_2 + z_3 x) e^{-x z_4} + z_5 x e^{-x z_6}, \quad x \geq 0$$

的Svensson曲线看起来能得到更好的拟合，参见图 8.3用Svensson曲线来对图 6.4的市场数据的拟合。

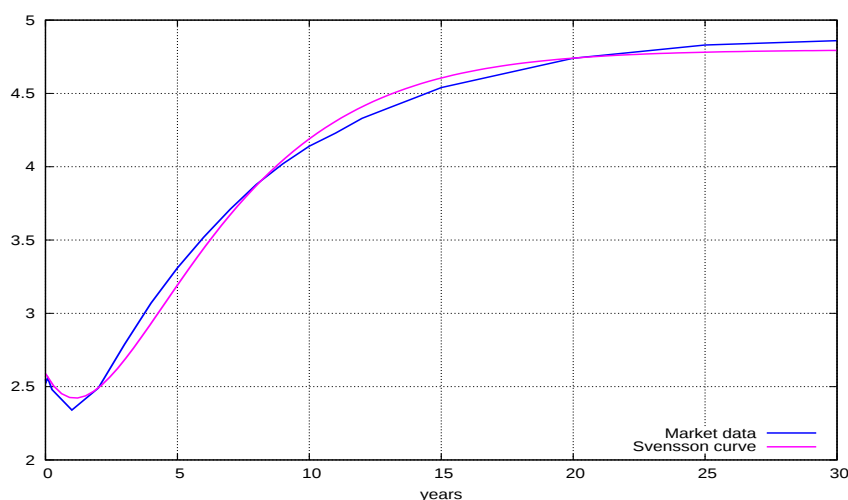


图 8.3: 市场数据 vs Svensson 曲线的对比.

为了解决模拟问题可以考虑构造一个在Svensson空间取值的 瞬时利率过程，如

$$\begin{aligned} x \mapsto f(t, T) &= f(t, t+x) \\ &= z_1(t) + (z_2(t) + z_3(t)x)e^{-xz_4(t)} + z_5(t)xe^{-xz_6(t)}, \end{aligned}$$

$x \geq 0$, 其中 $z_i(t)$, $i = 1, \dots, 6$ 是适当选取的随机过程且 $x = T - t$. 图 6.1给出了这种方法模拟出来的一个例子。

在这种情况下，短期利率可以定义为

$$r_t = f(t, t+0) = z_1(t) + z_2(t), \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

然而这样模拟方法会出现是否与无套利假设一致的问题，从而能得到下面的关系式

$$P(t, T) = \exp\left(-\int_t^T f(t, s)ds\right) \quad (8.3)$$

和债券定价关系式

$$P(t, T) = \mathbb{E} \left[\exp \left(- \int_t^T r_s ds \right) \mid \mathcal{F}_t \right] \quad (8.4)$$

并意味着条件

$$\exp \left(- \int_t^T f(t, s) ds \right) = \mathbb{E} \left[\exp \left(- \int_t^T f(s, s) ds \right) \mid \mathcal{F}_t \right]$$

成立。

这个问题的答案显然是否定的，因为可证明HJM曲线不存在于Nelson–Siegel空间或 Svensson 空间，参见[Bjö04]中的§3.5。

§8.2 确定漂移项

一个可能解决曲线拟合问题的方法是使用确定的漂移项。在此我们再次考虑远期利率的 Vasicek模型其中为了行文的简便设 $a = 0$ 。给定 $T \mapsto \varphi(T)$ 为一个确定的函数，设

$$f(t, T) := \varphi(T) + X_t e^{-b(T-t)} - \frac{\sigma^2}{2b^2} (1 - e^{-b(T-t)})^2, \quad (8.5)$$

其中 $T \mapsto \varphi(T)$ 是给定的确定函数，且 X_t 是

$$dX_t = -bX_t dt + \sigma dB_t$$

且 $X_0 = 0$ 的解。

由关系式 (8.5) 当 $t = 0$ 时，我们可验证选取 $T \mapsto \varphi(T)$ 为

$$\varphi(T) := f^M(0, T) + \frac{\sigma^2}{2b^2} (1 - e^{-bT})^2 \quad (8.6)$$

使得我们可以拟合任意的初始市场期限结构 $T \mapsto f^M(0, T)$ ，或者我们在给定（唯一）的时刻 t 选取的任意（固定的）期限结构。

在这个模型中，短期利率 r_t 为

$$r_t = f(t, t) = \varphi(t) + X_t. \quad (8.7)$$

这个模型的意义在于获得与无套利假设的一致性以及上面的关系式 (8.3) 和 (8.4)，因为我们有

$$\begin{aligned}
 P(t, T) &= \mathbb{E} \left[\exp \left(- \int_t^T r_s ds \right) \mid \mathcal{F}_t \right] \\
 &= \mathbb{E} \left[\exp \left(- \int_t^T \varphi(s) ds - \int_t^T X_s ds \right) \mid \mathcal{F}_t \right] \\
 &= \exp \left(- \int_t^T \varphi(s) ds \right) \mathbb{E} \left[\exp \left(- \int_t^T X_s ds \right) \mid \mathcal{F}_t \right] \\
 &= \exp \left(- \int_t^T \varphi(s) ds \right) \exp \left(- \int_t^T \left(X_t e^{-b(s-t)} - \frac{\sigma^2}{2b^2} (1 - e^{-b(s-t)})^2 \right) ds \right) \\
 &= \exp \left(- \int_t^T f(t, s) ds \right),
 \end{aligned}$$

其中我们使用将债券价格为 $a = 0$ 时 Vasicek 模型中远期利率的积分的表达式。注意到这个假设却仅限于一条初始曲线。

§8.3 相关性问题

当考虑一个精炼的模型时，相关性问题是另一个要考虑的方面。让我们考虑下面的到期日为 $T_3 = 30$ 的债券价格模拟，参见图 8.4.

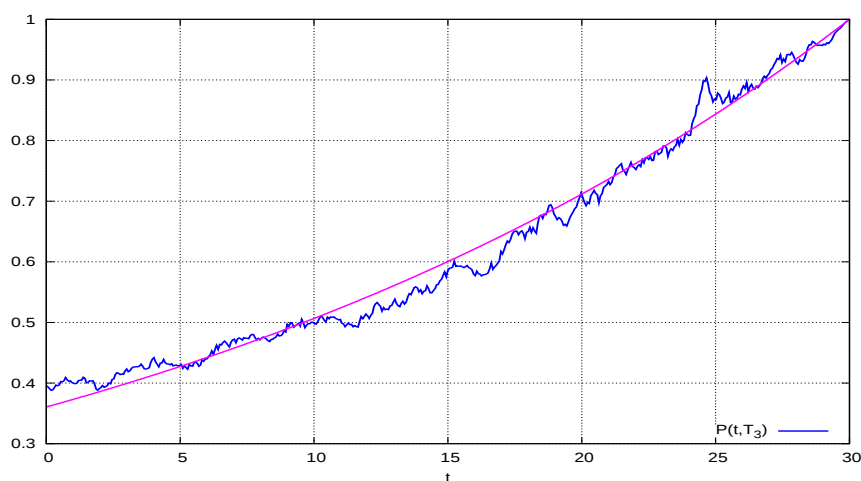


图 8.4: $t \mapsto P(t, T_3)$ 的图形.

下面，到期日为 $T_2 = 20$ 的另一个债券价格的模拟在图 8.5中给出。

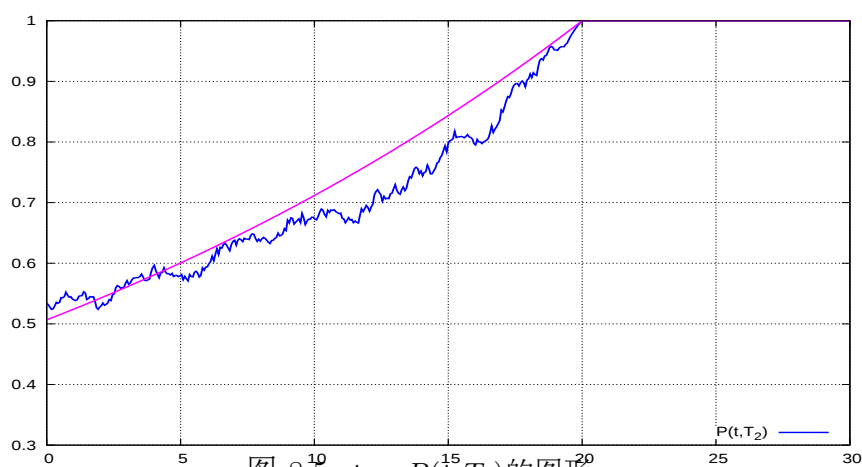


图 8.5: $t \mapsto P(t, T_2)$ 的图形.

让我们将这些图形和在图 8.6给出的到期日为 $T_1 = 10$ 的债券价格的模拟相比较。显然，到期日分别为 T_1 和 T_2 的债券价格 $P(t, T_1)$ 和 $P(t, T_2)$ 是相关的并有关系式

$$P(t, T_2) = P(t, T_1) \exp(A(t, T_2) - A(t, T_1) + r_t(C(t, T_2) - C(t, T_1))),$$

这说明不同到期日的债券价格可以相互推出，这是不现实的。注意到如果 X 和 Y 是同一个随机变量 Z 的两个线性：

$$X = a + bZ, \quad Y = c + dZ,$$

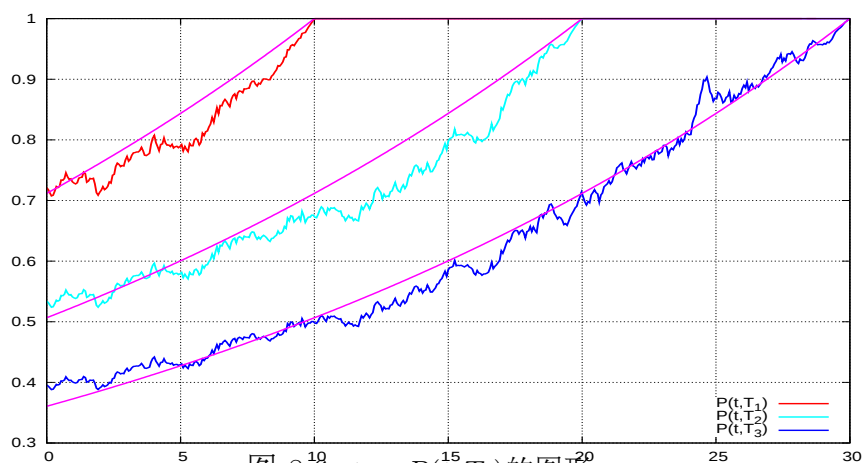


图 8.6: $t \mapsto P(t, T_1)$ 的图形.

则它们的协方差（见附录 A）等于

$$\begin{aligned}\operatorname{Cov}(X, Y) &= \operatorname{Cov}(a + bZ, c + dZ) \\ &= \operatorname{Cov}(bZ, dZ) \\ &= bd \operatorname{Cov}(Z, Z) \\ &= bd \operatorname{Var}(Z),\end{aligned}$$

和

$$\operatorname{Var} X = b^2 \operatorname{Var} Z, \quad \operatorname{Var} Y = d^2 \operatorname{Var} Z,$$

因此

$$\operatorname{Cor}(X, Y) = \frac{\operatorname{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\operatorname{Var} X} \sqrt{\operatorname{Var} Y}} = 1,$$

即 X 和 Y 是完全相关的。特别地在短期利率的提炼模型下这一性质是成立的，这意味着在提炼模型我们有完全相关性

$$\operatorname{Cor}(\log P(t, T_1), \log P(t, T_2)) = 1.$$

§8.4 二元模型

一个部分解决相关性问题的方法是考虑两个控制过程 $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$, $(Y_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ ，它们为下一方程组的解

$$\begin{cases} dX_t = \mu_1(t, X_t)dt + \sigma_1(t, X_t)dB_t^1, \\ dY_t = \mu_2(t, Y_t)dt + \sigma_2(t, Y_t)dB_t^2, \end{cases} \quad (8.8)$$

其中 $(B_t^1)_{t \in \mathbb{R}_+}$, $(B_t^2)_{t \in \mathbb{R}_+}$ 是两个（可能相关）的布朗运动，且相关的债券价格定义为

$$P(t, T_1) = \mathbb{E} \left[\exp \left(- \int_t^{T_1} X_s ds \right) \mid \mathcal{F}_t \right]$$

和

$$P(t, T_2) = \mathbb{E} \left[\exp \left(- \int_t^{T_2} Y_s ds \right) \mid \mathcal{F}_t \right].$$

这种方法却不可避免地导致了其他的困难，也就是：

- 出现了两个表示利率的过程 X_t 和 Y_t ,

- 对每个新的到期日 T_n , $n \geq 3$ 都需要引入一个新的控制过程。

下面我们将假设 $(B_t^1)_{t \in \mathbb{R}_+}$ 和 $(B_t^2)_{t \in \mathbb{R}_+}$ 有相关系数 $\rho \in [-1, 1]$, 也就是

$$\text{Cov}(B_s^1, B_t^2) = \rho \min(s, t), \quad s, t \in \mathbb{R}_+. \quad (8.9)$$

注意到用随机微分表示这意味着

$$dB_t^1 dB_t^2 = \rho dt. \quad (8.10)$$

实际上, $(B^1)_{t \in \mathbb{R}_+}$ 和 $(B^2)_{t \in \mathbb{R}_+}$ 可由两个独立的布朗运动 $(W^1)_{t \in \mathbb{R}_+}$ 和 $(W^2)_{t \in \mathbb{R}_+}$ 重新构造, 通过假设

$$\begin{cases} B_t^1 = W_t^1, \\ B_t^2 = \rho W_t^1 + \sqrt{1 - \rho^2} W_t^2, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

且这个构造使得关系式 (8.9) 和 (8.10) 很容易满足。

在二元模型可以选择通过令

$$r_t = \varphi(t) + X_t + Y_t, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

来构造短期利率 r_t , 其中函数 $\varphi(T)$ 可如 (8.6) 式选取为使得拟合初始远期曲线的函数。

通过 4 章中的标准套利理论, 我们定义到期日为 T 的债券价格为

$$P(t, T) := \mathbb{E} \left[\exp \left(- \int_t^T r_s ds \right) \mid \mathcal{F}_t \right]. \quad (8.11)$$

作为随机微分方程 (8.8) 的一个解, $(X_t, Y_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ 是具有马氏性的且可写为

$$P(t, T) = \mathbb{E} \left[\exp \left(- \int_t^T r_s ds \right) \mid X_t, Y_t \right], \quad (8.12)$$

然而它将不再直接依赖于短期利率 r_t 。

无论如何， $P(t, T)$ 可重新写为关于 t, X_t 和 Y_t 的函数

$$P(t, T) = F(t, X_t, Y_t),$$

并且可以用两变量伊藤公式来推导 $\mathbb{R}^2$ 空间上关于债券价格 $P(t, T)$ 的偏微分方程，利用事实

$$\begin{aligned} t \mapsto e^{-\int_0^t r_s ds} P(t, T) &= e^{-\int_0^t r_s ds} \mathbb{E} \left[\exp \left(-\int_t^T r_s ds \right) \mid \mathcal{F}_t \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\exp \left(-\int_0^T r_s ds \right) \mid \mathcal{F}_t \right] \end{aligned}$$

是一个在测度 $\mathbb{P}$ 下的 $\mathcal{F}_t$ -鞅。

我们有

$$\begin{aligned} d \left(e^{-\int_0^t r_s ds} P(t, T) \right) &= -r_t e^{-\int_0^t r_s ds} P(t, T) dt + e^{-\int_0^t r_s ds} dP(t, T) \quad (8.13) \\ &= -r_t e^{-\int_0^t r_s ds} P(t, T) dt + e^{-\int_0^t r_s ds} dF(t, X_t, Y_t) \\ &= -r_t e^{-\int_0^t r_s ds} P(t, T) dt + e^{-\int_0^t r_s ds} \frac{\partial F}{\partial x}(t, X_t, Y_t) dX_t \\ &\quad + e^{-\int_0^t r_s ds} \frac{\partial F}{\partial y}(t, X_t, Y_t) dY_t + \frac{1}{2} e^{-\int_0^t r_s ds} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t, X_t, Y_t) \sigma_1^2(t, X_t) dt \\ &\quad + \frac{1}{2} e^{-\int_0^t r_s ds} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(t, X_t, Y_t) \sigma_2^2(t, Y_t) dt \\ &\quad + e^{-\int_0^t r_s ds} \rho \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(t, X_t, Y_t) \sigma_1(t, X_t) \sigma_2(t, Y_t) dt \\ &= e^{-\int_0^t r_s ds} \frac{\partial F}{\partial x}(t, X_t, Y_t) \sigma_1(t, X_t) dB_t^1 + e^{-\int_0^t r_s ds} \frac{\partial F}{\partial y}(t, X_t, Y_t) \sigma_2(t, Y_t) dB_t^2 \\ &\quad + e^{-\int_0^t r_s ds} \left(-r_t P(t, T) + \frac{\partial F}{\partial x}(t, X_t, Y_t) \mu_1(t, X_t) + \frac{\partial F}{\partial y}(t, X_t, Y_t) \mu_2(t, Y_t) \right. \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t, X_t, Y_t) \sigma_1^2(t, X_t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(t, X_t, Y_t) \sigma_2^2(t, Y_t) \\ &\quad \left. + \rho \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(t, X_t, Y_t) \sigma_1(t, X_t) \sigma_2(t, Y_t) \right) dt, \end{aligned}$$

因此债券定价的偏微分方程 为

$$-(\varphi(t) + x + y)F(t, x, y) + \mu_1(t, x) \frac{\partial F}{\partial x}(t, x, y)$$

$$\begin{aligned}
 & +\mu_2(t, y) \frac{\partial F}{\partial y}(t, x, y) + \frac{1}{2} \sigma_1^2(t, x) \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t, x, y) \\
 & + \frac{1}{2} \sigma_2^2(t, y) \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(t, x, y) + \rho \sigma_1(t, x) \sigma_2(t, y) \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(t, x, y) = 0. \quad (8.14)
 \end{aligned}$$

下面我们考虑另一个Vasicek型的例子其中

$$\begin{cases} dX_t = -aX_t dt + \sigma dB_t^1, \\ dY_t = -bY_t dt + \eta dB_t^2. \end{cases} \quad (8.15)$$

在此, 我们选择由表达式(8.12)将 $P(t, T) = F(t, X_t, Y_t)$ 作为条件期望来计算, 而不直接求解 2-维偏微分方程(8.14)。

命题 8.1. 我们有

$$\begin{aligned}
 P(t, T) &= \exp \left(- \int_t^T \varphi(s) ds - \frac{1}{a} (1 - e^{-a(T-t)}) X_t - \frac{1}{b} (1 - e^{-b(T-t)}) Y_t \right) \\
 &\times \exp \left(\frac{\sigma^2}{2a^2} \int_t^T (e^{-a(T-s)} - 1)^2 ds + \frac{\eta^2}{2b^2} \int_t^T (e^{-b(T-s)} - 1)^2 ds \right) \\
 &\times \exp \left(\rho \frac{\sigma \eta}{ab} \int_t^T (e^{-a(T-s)} - 1)(e^{-b(T-s)} - 1) ds \right),
 \end{aligned}$$

$$0 \leq t \leq T.$$

Proof. 另一种证明方法见 [BM06], 第 4 章, 附录 A。注意到我们有

$$\begin{aligned}
 \int_0^t X_s ds &= \frac{1}{a} (\sigma B_t^1 - X_t) \\
 &= \frac{\sigma}{a} \left(B_t^1 - \int_0^t e^{-a(t-s)} dB_s^1 \right) \\
 &= \frac{\sigma}{a} \int_0^t (1 - e^{-a(t-s)}) dB_s^1,
 \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}
 \int_t^T X_s ds &= \int_0^T X_s ds - \int_0^t X_s ds \\
 &= \frac{\sigma}{a} \int_0^T (1 - e^{-a(T-s)}) dB_s^1 - \frac{\sigma}{a} \int_0^t (1 - e^{-a(t-s)}) dB_s^1 \\
 &= -\frac{\sigma}{a} \left(\int_0^t (e^{-a(T-s)} - e^{-a(t-s)}) dB_s^1 + \int_t^T (e^{-a(T-s)} - 1) dB_s^1 \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{\sigma}{a}(e^{-a(T-t)} - 1) \int_0^t e^{-a(t-s)} dB_s^1 - \frac{\sigma}{a} \int_t^T (e^{-a(T-s)} - 1) dB_s^1 \\
 &= -\frac{1}{a}(e^{-a(T-t)} - 1)X_t - \frac{\sigma}{a} \int_t^T (e^{-a(T-s)} - 1) dB_s^1,
 \end{aligned}$$

并且类似地,

$$\int_t^T Y_s ds = -\frac{1}{b}(e^{-b(T-t)} - 1)Y_t - \frac{\eta}{b} \int_t^T (e^{-b(T-s)} - 1) dB_s^2.$$

因此, 在条件 $\mathcal{F}_t$ 下, 随机向量 $(\int_t^T X_s ds, \int_t^T Y_s ds)$ 是一个高斯随机变量均值为

$$\begin{pmatrix} \mathbb{E} \left[\int_t^T X_s ds \mid \mathcal{F}_t \right] \\ \mathbb{E} \left[\int_t^T Y_s ds \mid \mathcal{F}_t \right] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a}(1 - e^{-a(T-t)})X_t \\ \frac{1}{b}(1 - e^{-b(T-t)})Y_t \end{pmatrix}$$

并且条件协方差矩阵

$$\text{Cov} \left(\int_t^T X_s ds, \int_t^T Y_s ds \mid \mathcal{F}_t \right) = \begin{pmatrix} \frac{\sigma^2}{a^2} \int_t^T (e^{-a(T-s)} - 1)^2 ds & \rho \frac{\sigma\eta}{ab} \int_t^T (e^{-a(T-s)} - 1)(e^{-b(T-s)} - 1) ds \\ \rho \frac{\sigma\eta}{ab} \int_t^T (e^{-a(T-s)} - 1)(e^{-b(T-s)} - 1) ds & \frac{\eta^2}{b^2} \int_t^T (e^{-b(T-s)} - 1)^2 ds \end{pmatrix}$$

可通过伊藤对偶性(1.4)得到。

注意到我们有

$$\begin{aligned}
 P(t, T) &= \mathbb{E} \left[\exp \left(- \int_t^T r_s ds \right) \mid \mathcal{F}_t \right] \\
 &= \exp \left(- \int_t^T \varphi(s) ds \right) \mathbb{E} \left[\exp \left(- \int_t^T X_s ds - \int_t^T Y_s ds \right) \mid \mathcal{F}_t \right] \\
 &= \exp \left(- \int_t^T \varphi(s) ds - \mathbb{E} \left[\int_t^T X_s ds \mid \mathcal{F}_t \right] - \mathbb{E} \left[\int_t^T Y_s ds \mid \mathcal{F}_t \right] \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \times \exp \left(\frac{1}{2} \left\langle \text{Cov} \left(\int_t^T X_s ds, \int_t^T Y_s ds \mid \mathcal{F}_t \right) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}^2} \right) \\
 = & \exp \left(- \int_t^T \varphi(s) ds - \frac{1}{a} (1 - e^{-a(T-t)}) X_t - \frac{1}{b} (1 - e^{-b(T-t)}) Y_t \right) \\
 & \times \exp \left(\frac{\sigma^2}{2a^2} \int_t^T (e^{-a(T-s)} - 1)^2 ds + \frac{\eta^2}{2b^2} \int_t^T (e^{-b(T-s)} - 1)^2 ds \right) \\
 & \times \exp \left(\rho \frac{\sigma \eta}{ab} \int_t^T (e^{-a(T-s)} - 1)(e^{-b(T-s)} - 1) ds \right),
 \end{aligned}$$

由于给定 $\mathcal{F}_t$, $\int_t^T X_s ds + \int_t^T Y_s ds$ 的方差等于

$$\left\langle \text{Cov} \left(\int_t^T X_s ds, \int_t^T Y_s ds \mid \mathcal{F}_t \right) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}^2},$$

高斯随机向量的Laplace变换(11.2)的细节见附录 A。

□

上一命题特别地表明了2-维偏微分方程 (8.14) 的解为

$$\begin{aligned}
 F(t, x, y) = & \exp \left(- \int_t^T \varphi(s) ds - \frac{1}{a} (1 - e^{-a(T-t)}) x - \frac{1}{b} (1 - e^{-b(T-t)}) y \right) \\
 & \times \exp \left(\frac{\sigma^2}{2a^2} \int_t^T (e^{-a(T-s)} - 1)^2 ds + \frac{\eta^2}{2b^2} \int_t^T (e^{-b(T-s)} - 1)^2 ds \right) \\
 & \times \exp \left(\rho \frac{\sigma \eta}{ab} \int_t^T (e^{-a(T-s)} - 1)(e^{-b(T-s)} - 1) ds \right).
 \end{aligned}$$

债券价格 $P(t, T)$ 同样可写为

$$P(t, T) = F_1(t, X_t) F_2(t, Y_t) \exp \left(- \int_t^T \varphi(s) ds + U(t, T) \right), \quad (8.16)$$

其中 $F_1(t, X_t)$ 和 $F_2(t, Y_t)$ 是 Vasicek 模型中与 X_t 和 Y_t 有关的债券价格:

$$F_1(t, X_t) = \mathbb{E} \left[\exp \left(- \int_t^T X_s ds \right) \mid X_t \right]$$

$$= \exp \left(\frac{\sigma^2}{a^2} \left(T - t + \frac{2}{a} e^{-a(T-t)} - \frac{1}{2a} e^{-2a(T-t)} - \frac{3}{2a} \right) - \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a} X_t \right),$$

$$\begin{aligned} F_2(t, Y_t) &= \mathbb{E} \left[\exp \left(- \int_t^T Y_s ds \right) \mid Y_t \right] \\ &= \exp \left(\frac{\eta^2}{b^2} \left(T - t + \frac{2}{b} e^{-b(T-t)} - \frac{1}{2b} e^{-2b(T-t)} - \frac{3}{2b} \right) - \frac{1 - e^{-b(T-t)}}{b} Y_t \right), \end{aligned}$$

和

$$U(t, T) = \rho \frac{\sigma \eta}{ab} \left(T - t + \frac{e^{-a(T-t)} - 1}{a} + \frac{e^{-b(T-t)} - 1}{b} - \frac{e^{-(a+b)(T-t)} - 1}{a+b} \right)$$

是一个当 $(B_t^1)_{t \in \mathbb{R}_+}$ 和 $(B_t^2)_{t \in \mathbb{R}_+}$ 独立时, 即当 $\rho = 0$ 时消失的相关项。

对 $\log P(t, T)$ 关于 T 求偏微分得到瞬时短期利率

$$\begin{aligned} f(t, T) &= - \frac{\partial \log P(t, T)}{\partial T} \\ &= \varphi(T) + f_1(t, T) + f_2(t, T) - \rho \frac{\sigma \eta}{ab} (1 - e^{-a(T-t)})(1 - e^{-b(T-t)}) \\ &= \varphi(T) + X_t e^{-a(T-t)} - \frac{\sigma^2}{2a^2} (1 - e^{-a(T-t)})^2 + Y_t e^{-b(T-t)} \quad (8.17) \\ &\quad - \frac{\eta^2}{2b^2} (1 - e^{-b(T-t)})^2 - \rho \frac{\sigma \eta}{ab} (1 - e^{-a(T-t)})(1 - e^{-b(T-t)}), \end{aligned}$$

其中 $f_1(t, T)$, $f_2(t, T)$ 是分别对应于 X_t 和 Y_t 的瞬时远期利率, 即

$$f_1(t, T) = X_t e^{-a(T-t)} - \frac{\sigma^2}{2a^2} (1 - e^{-a(T-t)})^2$$

和

$$f_2(t, T) = Y_t e^{-b(T-t)} - \frac{\eta^2}{2b^2} (1 - e^{-b(T-t)})^2.$$

显然, 远期瞬时利率现在有很大的自由度, 特别地我们可以独立地选择(8.17)中出现的参数 a 和 b 。一个通过这种方式得到的远期利率曲线的例子在图 8.7 中给出。

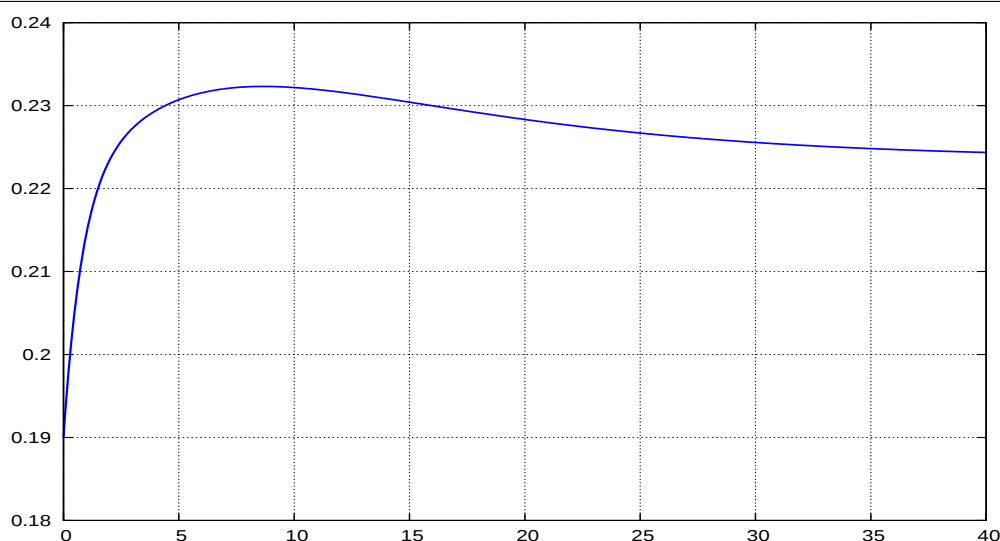


图 8.7: 二元模型中远期利率的图形。

§8.5 练习

练习 8.1. 求出关于定义于(8.16)式中的 $P(t, T)$ 所满足的随机微分方程。

练习 8.2. 考虑Hull-White模型其短期利率过程 $(r_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ 满足方程

$$dr_t = (\theta(t) - ar_t)dt + \sigma dB_t, \quad (8.18)$$

其中 $a \in \mathbb{R}$, $\theta(t)$ 是关于 t 的确定函数, 初始条件 r_0 也是确定的, 且 $(B_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ 是在 $\mathbb{P}$ 下的标准布朗运动, 产生信息流 $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$. 设债券价格 $P(t, T)$ 在无套利假设下定义为

$$P(t, T) = \mathbb{E} \left[e^{-\int_t^T r_s ds} \mid \mathcal{F}_t \right], \quad 0 \leq t \leq T.$$

回顾由 $(r_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ 的马氏性可得, 存在函数

$$(t, x) \mapsto F(t, x)$$

使得

$$F(t, r_t) = P(t, T), \quad 0 \leq t \leq T.$$

1. 设 $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ 为如下随机微分方程的解

$$\begin{cases} dX_t = -aX_t dt + \sigma dB_t, & t > 0, \\ X_0 = 0. \end{cases} \quad (8.19)$$

证明

$$r_t = r_0 e^{-at} + \varphi(t) + X_t, \quad t > 0,$$

其中

$$\varphi(t) = \int_0^t \theta(u) e^{-a(t-u)} du, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

2. 运用伊藤算子，推导函数 $(t, x) \mapsto F(t, x)$ 所满足的偏微分方程。
3. 注意到 (参见 练习 4.2) $\int_t^T X_s ds$ 在已知 $\mathcal{F}_t$ 的条件下服从高斯分布，则有

$$\mathbb{E} \left[\int_t^T X_s ds \mid \mathcal{F}_t \right] = \frac{X_t}{a} (1 - e^{-a(T-t)})$$

且

$$\text{Var} \left[\int_t^T X_s ds \mid \mathcal{F}_t \right] = \frac{\sigma^2}{a^2} \int_t^T (e^{-a(T-s)} - 1)^2 ds.$$

证明债券价格 $P(t, T)$ 可写为

$$P(t, T) = e^{A(t, T) + X_t C(t, T)},$$

其中 $A(t, T)$ 和 $C(t, T)$ 是待定函数。

4. 证明在该模型中，瞬时远期利率

$$f(t, T) = -\frac{\partial \log P(t, T)}{\partial T}$$

满足

$$f(t, T) = r_0 e^{-aT} + \varphi(T) + X_t e^{-a(T-t)} - \frac{\sigma^2}{2a^2} (1 - e^{-a(T-t)})^2, \quad 0 \leq t \leq T.$$

5. 计算 $d_t f(t, T)$ 并推导瞬时远期利率 $f(t, T)$ 所满足的随机微分方程。
6. 证明该方程满足HJM无套利条件。
7. 设初始利率曲线的市场数据由以下函数给出

$$T \mapsto f^M(0, T).$$

证明可选取合适的函数 $\varphi(t)$ 使得理论值 $f(0, T)$ 符合市场值 $f^M(0, T)$ ，即

$$f(0, T) = f^M(0, T), \quad \forall T > 0.$$

8. 证明选取 $\theta(t)$ 等于

$$\theta(t) = af^M(0, t) + \frac{\partial f^M}{\partial t}(0, t) + \frac{\sigma^2}{2a}(1 - e^{-2at}), \quad t > 0,$$

要满足

$$f(0, T) = f^M(0, T), \quad \forall T > 0.$$

9. 证明

$$\frac{dP(t, T)}{P(t, T)} = r_t dt + \zeta_t dB_t,$$

和

$$d\left(e^{-\int_0^t r_s ds} P(t, T)\right) = \zeta_t e^{-\int_0^t r_s ds} P(t, T) dB_t, \quad (8.20)$$

其中 $(\zeta_t)_{t \in [0, T]}$ 是一个待定过程。

10. 设远期测度 $\tilde{\mathbb{P}}$ 可通过关于测度的 $\mathbb{P}$ 的条件密度定义为

$$\mathbb{E} \left[\frac{d\tilde{\mathbb{P}}}{d\mathbb{P}} \mid \mathcal{F}_t \right] = \frac{P(t, T)}{P(0, T)} e^{-\int_0^t r_s ds}$$

. 通过解方程 (4.10) 计算 $d\tilde{\mathbb{P}}/d\mathbb{P}$.

11. 运用 Girsanov 定理, 在远期测度 $\tilde{\mathbb{P}}$ 下计算 r_t 的动态。

12. 运用伊藤算子, 证明

$$t \mapsto \frac{P(t, S)}{P(t, T)}, \quad 0 \leq t \leq T \leq S,$$

在 $\tilde{\mathbb{P}}$ 下是鞅。

13. 证明

$$\mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}} \left[P(T, S) \mid \mathcal{F}_t \right] = \frac{P(t, S)}{P(t, T)}, \quad 0 \leq t \leq T \leq S,$$

且由此等式, 得出以 $P(t, S)/P(t, T)$ 表示的下式的值

$$A(T, S) + C(T, S) \mathbb{E}[X_T \mid \mathcal{F}_t] + \frac{1}{2} |C(T, S)|^2 \text{Var}[X_T \mid \mathcal{F}_t].$$

14. 计算债券卖出期权在 t 时的价格

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[e^{-\int_t^T r_s ds} (K - P(T, S))^+ \mid \mathcal{F}_t \right] = P(t, T) \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[(K - P(T, S))^+ \mid \mathcal{F}_t \right].$$

回顾 $x - K = (x - K)^+ - (K - x)^+$, 且在给定 $\mathcal{F}_t$ 的条件下, 若 X 是中心高斯随机变量, 均值为 m_t 方差为 v_t^2 则有

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(e^X - K)^+ \mid \mathcal{F}_t] &= \Phi \left(\frac{v_t}{2} + \frac{1}{v_t} (m_t + v_t^2/2 - \log K) \right) \\ &\quad - K \Phi \left(-\frac{v_t}{2} + \frac{1}{v_t} (m_t + v_t^2/2 - \log K) \right) \end{aligned}$$

其中

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x e^{-y^2/2} \frac{dy}{\sqrt{2\pi}}, \quad x \in \mathbb{R},$$

为高斯分布函数。

第九章 LIBOR模型中利率上限和利率互换期权的定价

本章中我们考虑用关于伦敦银行间同业拆借利率 (LIBOR) 的远期测度来定价 利率上限和利率互换期权, 其中关于LIBOR的远期利率可用不同的复利方式来定义。同时我们也介绍在下一章Brace–Gatarek–Musiela (BGM)模型中用到的互换利率。

§9.1 利率上限的定价

回顾敲定价格为 κ 的即期利率 $f(T, T, S)$ 的利率上限单元, 参见第 7章 它是一个损益为

$$(f(T, T, S) - \kappa)^+,$$

的合约, 在远期测度下其 $t \in [0, T]$ 时刻的价格为

$$\mathbb{E} \left[e^{-\int_t^S r_s ds} (f(T, T, S) - \kappa)^+ \mid \mathcal{F}_t \right] = P(t, S) \mathbb{E}_S \left[(f(T, T, S) - \kappa)^+ \mid \mathcal{F}_t \right],$$

其中 $\mathbb{E}_S$ 表示在测度 $\mathbb{P}_S$ 下的期望, 其密度为

$$\frac{d\mathbb{P}_S}{d\mathbb{P}} = \frac{1}{P(0, S)} e^{-\int_0^S r_s ds},$$

即

$$\frac{d\mathbb{P}_{S|\mathcal{F}_t}}{d\mathbb{P}_{|\mathcal{F}_t}} = \frac{e^{-\int_t^S r_s ds}}{P(t, S)}, \quad \text{or} \quad \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\frac{d\mathbb{P}_S}{d\mathbb{P}} \mid \mathcal{F}_t \right] = \frac{P(t, S)}{P(0, S)} e^{-\int_0^t r_s ds},$$

$t \in [0, S]$.

在实际中, 到期日期被安排为一个离散的 期限结构

$$\{0 = T_0 < T_1 < T_2 < \cdots < T_n\}.$$

图 5.1中远期利率曲线的实例数据在表格 9.1中给出, 其中包含了 $(T_1, T_2, \dots, T_{23})$ 和 $t = 07/05/2003$ 且 $\delta =$ 六个月时 $\{f(t, t + T_i, T_i + \delta)\}_{i=1, \dots, 23}$ 的值。

TimeSerieNb	508
AsOfDate	7-mai-03
2D	2.55
1W	2.53
1M	2.56
2M	2.52
3M	2.48
1Y	2.34
2Y	2.49
3Y	2.79
4Y	3.07
5Y	3.31
6Y	3.52
7Y	3.71
8Y	3.88
9Y	4.02
10Y	4.14
11Y	4.23
12Y	4.33
13Y	4.4
14Y	4.47
15Y	4.54
20Y	4.74
25Y	4.83
30Y	4.86

图 9.1: 基于利率期限结构的远期利率.

更一般地, 我们可以考虑关于给定的利率期限结构 $\{T_i, \dots, T_j\}$, $1 \leq i < j \leq n$ 利率上限而不是利率上限单元, 它的损益为

$$\sum_{k=i}^{j-1} (T_{k+1} - T_k) (f(T_k, T_k, T_{k+1}) - \kappa)^+.$$

由于利率上限可以分解为利率上限单元的和, 类似于利率上限单元的定价很容易推导出利率上限的定价公式。因此利率上限 在时刻 $t \in [0, T_i]$ 的价格为

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[\sum_{k=i}^{j-1} (T_{k+1} - T_k) e^{-\int_t^{T_{k+1}} r_s ds} (f(T_k, T_k, T_{k+1}) - \kappa)^+ \mid \mathcal{F}_t \right] \\ &= \sum_{k=i}^{j-1} (T_{k+1} - T_k) \mathbb{E} \left[e^{-\int_t^{T_{k+1}} r_s ds} (f(T_k, T_k, T_{k+1}) - \kappa)^+ \mid \mathcal{F}_t \right] \\ &= \sum_{k=i}^{j-1} (T_{k+1} - T_k) P(t, T_{k+1}) \mathbb{E}_{k+1} \left[(f(T_k, T_k, T_{k+1}) - \kappa)^+ \mid \mathcal{F}_t \right], \end{aligned}$$

其中 $\mathbb{E}_{k+1}$ 表示在定义为

$$\frac{d\mathbb{P}_{k+1}}{d\mathbb{P}} = \frac{1}{P(0, T_{k+1})} e^{-\int_0^{T_{k+1}} r_s ds}, \quad k = 0, \dots, n-1,$$

的远期测度 $\mathbb{P}_{k+1}$ 的期望。参见定义 7.1.

§9.2 远期利率测度和期限结构

本章中我们重新考虑多元远期测度 $\mathbb{P}_i$, $i = 1, \dots, n$ 的构造。回顾无套利条件就是说

$$t \mapsto e^{-\int_0^t r_s ds} P(t, T_i), \quad 0 \leq t \leq T_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

是一个在 $\mathbb{P}$ 下的 $\mathcal{F}_t$ -鞅。

定义 9.1. 概率测度 $\mathbb{P}_i$ 定义为

$$\frac{d\mathbb{P}_i}{d\mathbb{P}} = \frac{1}{P(0, T_i)} e^{-\int_0^{T_i} r_s ds}, \quad i = 1, \dots, n.$$

注意到 $i = 1, \dots, n$, 我们有

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\frac{d\mathbb{P}_i}{d\mathbb{P}} \mid \mathcal{F}_t \right] &= \frac{1}{P(0, T_i)} \mathbb{E} \left[e^{-\int_0^{T_i} r_s ds} \mid \mathcal{F}_t \right] \\ &= \frac{P(t, T_i)}{P(0, T_i)} e^{-\int_0^t r_s ds}, \quad 0 \leq t \leq T_i. \end{aligned}$$

更进一步, 对于所有的 $i = 1, \dots, n$ 我们有

$$\frac{d\mathbb{P}_{i|\mathcal{F}_t}}{d\mathbb{P}_{|\mathcal{F}_t}} = \frac{e^{-\int_t^{T_i} r_s ds}}{P(t, T_i)}, \quad 0 \leq t \leq T_i. \quad (9.1)$$

实际上, 对于所有的有界和 $\mathcal{F}_t$ -可测的随机变量 G ,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[G F e^{-\int_t^{T_i} r_s ds} \right] &= P(0, T_i) \mathbb{E}_i \left[G e^{\int_0^t r_s ds} F \right] \\ &= P(0, T_i) \mathbb{E}_i \left[G e^{\int_0^t r_s ds} \mathbb{E}_i[F \mid \mathcal{F}_t] \right] \\ &= \mathbb{E} \left[G e^{-\int_t^{T_i} r_s ds} \mathbb{E}_i[F \mid \mathcal{F}_t] \right] \\ &= P(t, T_i) \mathbb{E} [G \mathbb{E}_i[F \mid \mathcal{F}_t]], \end{aligned}$$

因此对于所有的可积随机变量 F 有

$$\mathbb{E} \left[F e^{-\int_t^{T_i} r_s ds} \mid \mathcal{F}_t \right] = P(t, T_i) \mathbb{E}_i[F \mid \mathcal{F}_t], \quad 0 \leq t \leq T_i,$$

(9.1)得证。

现在开始我们假设在(7.7)中 债券价格 $P(t, T_i)$ $i = 1, \dots, n$ 的动态为

$$\frac{dP(t, T_i)}{P(t, T_i)} = r_t dt + \zeta_i(t) dB_t. \quad (9.2)$$

下面的说法是平行于命题 7.3.

命题 9.1. 对于 $i = 1, \dots, n$, 设

$$B_t^i := B_t - \int_0^t \zeta_i(s) ds, \quad 0 \leq t \leq T_i, \quad (9.3)$$

则 $(B_t^i)_{t \in [0, T_i]}$ 是一个 $\mathbb{P}_i$ 下的标准布朗运动。

Proof. 设

$$\Phi_i(t) = \mathbb{E} \left[\frac{d\mathbb{P}_i}{d\mathbb{P}} \mid \mathcal{F}_t \right] = \frac{P(t, T_i)}{P(0, T_i)} e^{-\int_0^t r_s ds}, \quad 0 \leq t \leq T_i,$$

我们有 $d\Phi_i(t) = \Phi_i(t) \zeta_i(t) dB_t$, 因此由Girsanov定理,

$$B_t - \int_0^t \frac{1}{\Phi_i(s)} d\langle \Phi_i, B \rangle_s = B_t - \int_0^t \zeta_i(s) ds, \quad 0 \leq t \leq T_i,$$

是一个在 $\mathbb{P}_i$ 下的连续鞅。 □

回顾 $\mathbb{P}_i$ 下的期望表示为 $\mathbb{E}_i$ 。 下面的结果是和命题 7.2有关的。

命题 9.2. For all $1 \leq i, j \leq n$ we have

$$\mathbb{E}_i \left[\frac{d\mathbb{P}_j}{d\mathbb{P}_i} \mid \mathcal{F}_t \right] = \frac{P(0, T_i)}{P(0, T_j)} \frac{P(t, T_j)}{P(t, T_i)} \quad 0 \leq t \leq T_i \wedge T_j, \quad (9.4)$$

并且特别地过程

$$t \mapsto \frac{P(t, T_j)}{P(t, T_i)}, \quad 0 \leq t \leq T_i \wedge T_j,$$

是一个 $\mathbb{P}_i$ 下的 $\mathcal{F}_t$ -鞅, $1 \leq i, j \leq n$.

Proof. 对于所有有界 $\mathcal{F}_t$ -可测随机变量 F 我们有

1

$$\mathbb{E}_i \left[F \frac{d\mathbb{P}_j}{d\mathbb{P}_i} \right] = \mathbb{E} \left[F \frac{d\mathbb{P}_j}{d\mathbb{P}} \right]$$

¹我们将对于所有有界且 $\mathcal{F}_t$ -可测随机变量 G 重复使用特征函数 $X = \mathbb{E}[F|\mathcal{F}_t] \Leftrightarrow \mathbb{E}[GX] = \mathbb{E}[GF]$, 参见附录的(11.3).

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{P(0, T_j)} \mathbb{E} \left[F e^{-\int_0^{T_j} r_\tau d\tau} \right] \\
 &= \frac{1}{P(0, T_j)} \mathbb{E} \left[F e^{-\int_0^t r_\tau d\tau} P(t, T_j) \right] \\
 &= \frac{1}{P(0, T_j)} \mathbb{E} \left[F e^{-\int_0^{T_i} r_\tau d\tau} \frac{P(t, T_j)}{P(t, T_i)} \right] \\
 &= \mathbb{E}_i \left[F \frac{P(0, T_i)}{P(0, T_j)} \frac{P(t, T_j)}{P(t, T_i)} \right],
 \end{aligned}$$

(9.4)得证. □

对于任意的 $i, j = 1, \dots, n$ 由(9.2)通过伊藤公式我们有

$$\begin{aligned}
 d \left(\frac{P(t, T_j)}{P(t, T_i)} \right) &= \frac{P(t, T_j)}{P(t, T_i)} (\zeta_j(t) - \zeta_i(t)) (dB_t - \zeta_i(t) dt) \\
 &= \frac{P(t, T_j)}{P(t, T_i)} (\zeta_j(t) - \zeta_i(t)) dB_t^i,
 \end{aligned}$$

用命题 9.1 就证明了命题 9.2 的第二部分, 即 $P(t, T_j)/P(t, T_i)$ 的鞅性。

我们用 年计数器 的定义来结束本节内容。

$$P(t, T_i, T_j) = \sum_{k=i}^{j-1} (T_{k+1} - T_k) P(t, T_{k+1}), \quad 0 \leq t \leq T_i, \quad (9.5)$$

$1 \leq i < j \leq n$, 满足一下的鞅性。

命题 9.3. 折扣年计数器

$$t \mapsto e^{-\int_0^t r_s ds} P(t, T_i, T_j), \quad 0 \leq t \leq T_i,$$

是在 $\mathbb{P}$ 的鞅, $1 \leq i < j \leq n$ 。

Proof. 这一结果可由线性性和 $t \mapsto e^{-\int_0^t r_s ds} P(t, T_k)$ 对于所有的 $k = i, \dots, j$ 都是鞅的事实得到。另一方面, 有标准的推导有, 设 $\delta_i = T_{i+1} - T_i$, $i = 1, \dots, n-1$,

$$\mathbb{E} \left[e^{-\int_0^T r_s ds} P(T, T_i, T_j) \mid \mathcal{F}_t \right] = \sum_{k=i}^{j-1} \delta_k \mathbb{E} \left[e^{-\int_0^T r_s ds} P(T, T_{k+1}) \mid \mathcal{F}_t \right]$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=i}^{j-1} \delta_k \mathbb{E} \left[e^{-\int_0^T r_s ds} \mathbb{E} \left[e^{-\int_T^{T_{k+1}} r_s ds} \mid \mathcal{F}_T \right] \mid \mathcal{F}_t \right] \\
&= \sum_{k=i}^{j-1} \delta_k \mathbb{E} \left[e^{-\int_0^T r_s ds} \mathbb{E} \left[e^{-\int_T^{T_{k+1}} r_s ds} \mid \mathcal{F}_T \right] \mid \mathcal{F}_t \right] \\
&= \sum_{k=i}^{j-1} \delta_k \mathbb{E} \left[\mathbb{E} \left[e^{-\int_0^T r_s ds} e^{-\int_T^{T_{k+1}} r_s ds} \mid \mathcal{F}_T \right] \mid \mathcal{F}_t \right] \\
&= \sum_{k=i}^{j-1} \delta_k \mathbb{E} \left[\mathbb{E} \left[e^{-\int_0^{T_{k+1}} r_s ds} \mid \mathcal{F}_T \right] \mid \mathcal{F}_t \right] \\
&= \sum_{k=i}^{j-1} \delta_k \mathbb{E} \left[e^{-\int_0^{T_{k+1}} r_s ds} \mid \mathcal{F}_t \right] \\
&= \sum_{k=i}^{j-1} \delta_k P(t, T_{k+1}) \\
&= P(t, T_i, T_j),
\end{aligned}$$

对于 $0 \leq t \leq T \leq T_i$.

□

特别地我们有

$$P(t, T_i, T_{i+1}) = (T_{i+1} - T_i)P(t, T_{i+1}), \quad 0 \leq t \leq T_i.$$

$1 \leq i < n$.

注意到

$$\begin{aligned}
d \left(e^{-\int_0^t r_s ds} P(t, T_i, T_j) \right) &= \sum_{k=i}^{j-1} d \left(e^{-\int_0^t r_s ds} P(t, T_{k+1}) \right) \\
&= e^{-\int_0^t r_s ds} \sum_{k=i}^{j-1} \zeta_{k+1}(t) P(t, T_{k+1}) dB_t \\
&= e^{-\int_0^t r_s ds} P(t, T_i, T_j) \sum_{k=i}^{j-1} v_{k+1}^{i,j}(t) \zeta_{k+1}(t) dB_t,
\end{aligned}$$

其中

$$v_k^{i,j}(t) := \frac{P(t, T_k)}{P(t, T_i, T_j)}, \quad 0 \leq t \leq T_i,$$

$1 \leq i < j \leq n, 1 \leq k \leq n$ 这就证明了命题 9.3 的结果.

§9.3 互换和互换期权

利率互换使得我们有可能用一个固定利率 κ 来交换一个变动的 远期利率 $f(t, T, S)$ 。这样的交换将产生一个 在时刻 t 现金流的

$$\sum_{k=i}^{j-1} (T_{k+1} - T_k) P(t, T_{k+1}) (f(t, T_k, T_{k+1}) - \kappa).$$

关于 κ 的 $S(t, T_i, T_j)$ 值抵消了这笔现金流:

$$\sum_{k=i}^{j-1} (T_{k+1} - T_k) P(t, T_{k+1}) (f(t, T_k, T_{k+1}) - S(t, T_i, T_j)) = 0 \quad (9.6)$$

被称为互换利率 $S(t, T_i, T_j)$, 它满足

$$S(t, T_i, T_j) = \frac{1}{P(t, T_i, T_j)} \sum_{k=i}^{j-1} (T_{k+1} - T_k) P(t, T_{k+1}) f(t, T_k, T_{k+1}), \quad (9.7)$$

其中 $P(t, T_i, T_j)$ 是一个在(9.5)中定义的年计数器.

特别地, 当 $j = i + 1$ 我们有

$$S(t, T_i, T_{i+1}) = f(t, T_i, T_{i+1}),$$

即在这种情况下远期利率和互换利率是一致的。

一个利率上限期权是一个保护基于利率互换风险的合约, 其损益为

$$\left(\sum_{k=i}^{j-1} (T_{k+1} - T_k) e^{-\int_{T_i}^{T_{k+1}} r_s ds} (f(T_i, T_k, T_{k+1}) - \kappa) \right)^+.$$

这个利率上限期权在时刻 $t \in [0, T_i]$ 可定价为

$$\mathbb{E} \left[e^{-\int_t^{T_i} r_s ds} \left(\sum_{k=i}^{j-1} (T_{k+1} - T_k) e^{-\int_{T_i}^{T_{k+1}} r_s ds} (f(T_i, T_k, T_{k+1}) - \kappa) \right)^+ \mid \mathcal{F}_t \right]. \quad (9.8)$$

与利率上限不同，上式的正部不能从和式取出来。然而利率互换期权的价格可以用界为：

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{E} \left[e^{-\int_t^{T_i} r_s ds} \left(\sum_{k=i}^{j-1} (T_{k+1} - T_k) e^{-\int_{T_i}^{T_{k+1}} r_s ds} (f(T_i, T_k, T_{k+1}) - \kappa) \right)^+ \middle| \mathcal{F}_t \right] \\
 & \leq \mathbb{E} \left[e^{-\int_t^{T_i} r_s ds} \sum_{k=i}^{j-1} (T_{k+1} - T_k) e^{-\int_{T_i}^{T_{k+1}} r_s ds} (f(T_i, T_k, T_{k+1}) - \kappa)^+ \middle| \mathcal{F}_t \right] \\
 & = \sum_{k=i}^{j-1} (T_{k+1} - T_k) \mathbb{E} \left[e^{-\int_t^{T_{k+1}} r_s ds} (f(T_i, T_k, T_{k+1}) - \kappa)^+ \middle| \mathcal{F}_t \right] \\
 & = \sum_{k=i}^{j-1} (T_{k+1} - T_k) P(t, T_{k+1}) \mathbb{E}_{k+1} \left[(f(T_i, T_k, T_{k+1}) - \kappa)^+ \middle| \mathcal{F}_t \right].
 \end{aligned}$$

随后在实际上互换期权的价格(9.8)可以计算为

$$\mathbb{E} \left[e^{-\int_t^{T_i} r_s ds} \left(\sum_{k=i}^{j-1} (T_{k+1} - T_k) P(T_i, T_{k+1}) (f(T_i, T_k, T_{k+1}) - \kappa) \right)^+ \middle| \mathcal{F}_t \right], \tag{9.9}$$

这意味着我们可以用其关于 $\mathcal{F}_{T_i}$ 的条件期望 $P(T_i, T_{k+1})$ 来渐近折扣因子 $e^{-\int_{T_i}^{T_{k+1}} r_s ds}$ 。(9.9)的使用而不是(9.8)将是在计算利率互换期权价格时连接LIBOR 的关键，参见下面的(9.22)。

注意到当 $j = i + 1$ ，利率互换期权 (9.9) 与在时间间隔为 $\delta_i := T_{i+1} - T_i$ 的时间区间 $[T_i, T_{i+1}]$ 上的利率上限在时刻 t 的价格一致因为

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{E} \left[e^{-\int_t^{T_i} r_s ds} ((T_{i+1} - T_i) P(T_i, T_{i+1}) (f(T_i, T_i, T_{i+1}) - \kappa))^+ \middle| \mathcal{F}_t \right] \\
 & = (T_{i+1} - T_i) \mathbb{E} \left[e^{-\int_t^{T_i} r_s ds} P(T_i, T_{i+1}) ((f(T_i, T_i, T_{i+1}) - \kappa))^+ \middle| \mathcal{F}_t \right] \\
 & = \delta_i \mathbb{E} \left[e^{-\int_t^{T_i} r_s ds} \mathbb{E} \left[e^{-\int_{T_i}^{T_{i+1}} r_s ds} \middle| \mathcal{F}_{T_i} \right] ((f(T_i, T_i, T_{i+1}) - \kappa))^+ \middle| \mathcal{F}_t \right] \\
 & = \delta_i \mathbb{E} \left[\mathbb{E} \left[e^{-\int_t^{T_i} r_s ds} e^{-\int_{T_i}^{T_{i+1}} r_s ds} ((f(T_i, T_i, T_{i+1}) - \kappa))^+ \middle| \mathcal{F}_{T_i} \right] \middle| \mathcal{F}_t \right] \\
 & = \delta_i \mathbb{E} \left[e^{-\int_t^{T_{i+1}} r_s ds} ((f(T_i, T_i, T_{i+1}) - \kappa))^+ \middle| \mathcal{F}_t \right],
 \end{aligned}$$

$$0 \leq t \leq T_i.$$

§9.4 伦敦银行间同业拆借利率 (LIBOR) 模型

回顾远期利率 $f(t, T, S)$, $0 \leq t \leq T \leq S$, 它通过以下的关系式定义

$$P(t, T) - P(t, S) \exp((S - T)f(t, T, S)) = 0, \quad (9.10)$$

或者

$$\exp((S - T)f(t, T, S)) = \frac{P(t, T)}{P(t, S)},$$

即

$$f(t, T, S) = -\frac{\log P(t, S) - \log P(t, T)}{S - T}.$$

为了计算互换期权的价格用伦敦银行间同业拆借市场中的远期利率比(9.10)中给出的 标准远期利率更好。

LIBOR市场中 t 时刻的远期利率合约赋予其所有者在未来时间区间 $[T, S]$ 内获得利率 $L(t, T, S)$ 。然而, 在时间区间 $[T, S]$ 内的债务的远期LIBOR率 $L(t, T, S)$ 是用单利而不是指数复利形式定义的, 即在式(9.10)中代入关系式

$$1 + (S - T)L(t, T, S) = \frac{P(t, T)}{P(t, S)}.$$

等价地我们有

$$P(t, T) - P(t, S) - P(t, S)(S - T)L(t, T, S) = 0,$$

$0 \leq t \leq T < S$ 因此我们就得到了以下的定义。

定义 9.2. 在时刻 t 关于 $[T, S]$ 的债务的远期 LIBOR 率 $L(t, T, S)$ 定义为

$$L(t, T, S) = \frac{1}{S - T} \left(\frac{P(t, T)}{P(t, S)} - 1 \right), \quad 0 \leq t \leq T < S.$$

关于LIBOR率的动态模型 (BGM模型) 将在 10章中考虑。

注意到如果 $1 \leq i < j \leq n$ 我们有

$$P(t, T_j) = P(t, T_i) \prod_{k=i}^{j-1} \frac{1}{1 + (T_{k+1} - T_k)L(t, T_k, T_{k+1})}, \quad 0 \leq t \leq T_i,$$

并且如果 $1 \leq j \leq i \leq n$,

$$P(t, T_j) = P(t, T_i) \prod_{k=j}^{i-1} (1 + (T_{k+1} - T_k) L(t, T_k, T_{k+1})), \quad 0 \leq t \leq T_j.$$

瞬时远期利率 $f(t, T)$ 可从 LIBOR $L(t, T, S)$ 得到

$$\begin{aligned} f(t, T) &= -\frac{\partial}{\partial T} \log P(t, T) \\ &= -\frac{1}{P(t, T)} \frac{\partial P}{\partial T}(t, T) \\ &= -\frac{1}{P(t, T)} \lim_{S \searrow T} \frac{P(t, S) - P(t, T)}{S - T} \\ &= -\lim_{S \searrow T} \frac{P(t, S) - P(t, T)}{(S - T)P(t, S)} \\ &= \lim_{S \searrow T} L(t, T, S) \\ &= L(t, T, T). \end{aligned}$$

在这个模型中短期利率满足

$$r_t = L(t, t, t), \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

图 9.2 给出了由 Vasicek 模型的上一个图例通过简单复利计算出的即期利率 $t \mapsto L(t, t, T)$ 的一个模拟。

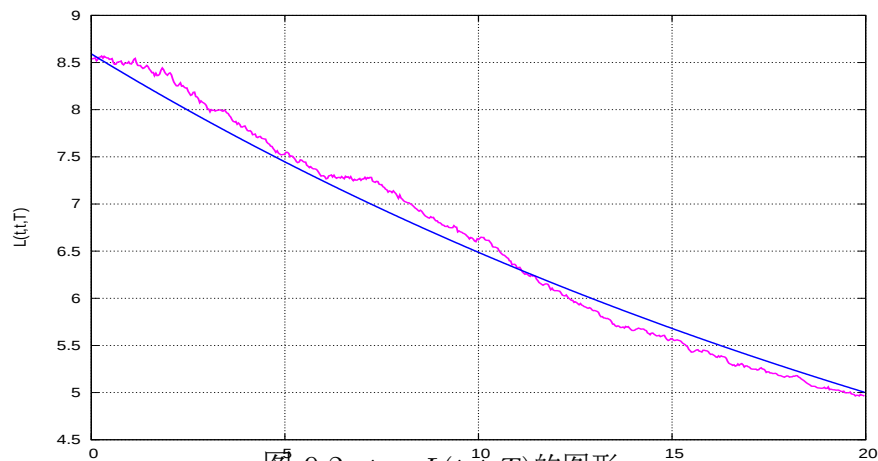


图 9.2: $t \mapsto L(t, t, T)$ 的图形.

远期曲线 $T \mapsto L(0, T, T + \delta)$ 在时刻 $t = 0$ 的图形描绘在图 9.3 中, 同样是用 Vasicek 模型中的债券价格计算出来的。

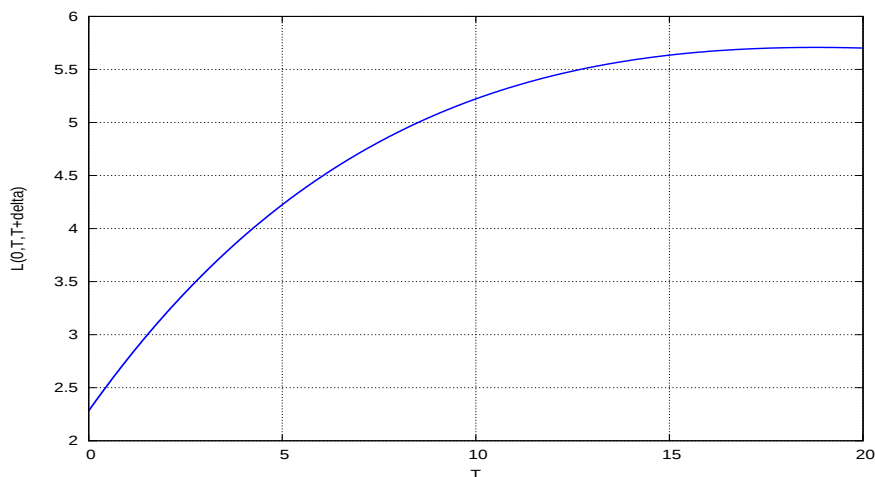


图 9.3: $T \mapsto L(0, T, T + \delta)$ 的图形.

§9.5 LIBOR 市场中的互换率

由 (9.6) LIBOR 市场中的远期互换率 $S(t, T_i, T_j)$ 满足

$$\sum_{k=i}^{j-1} (T_{k+1} - T_k) P(t, T_{k+1}) (L(t, T_k, T_{k+1}) - S(t, T_i, T_j)) = 0.$$

命题 9.4. 我们有

$$S(t, T_i, T_j) = \frac{P(t, T_i) - P(t, T_j)}{P(t, T_i, T_j)}, \quad 0 \leq t \leq T_i, \quad 1 \leq i < j \leq n.$$

Proof. 由远期 LIBOR 率 $L(t, T, S)$ 的定义我们有

$$P(t, T_k) - P(t, T_{k+1}) - (T_{k+1} - T_k) P(t, T_{k+1}) L(t, T_k, T_{k+1}) = 0,$$

因此对 $k = i, \dots, j - 1$ 求和可得

$$P(t, T_i) - P(t, T_j) - \sum_{k=i}^{j-1} (T_{k+1} - T_k) P(t, T_{k+1}) L(t, T_k, T_{k+1}) = 0.$$

最后, (9.7) 满足

$$\begin{aligned} S(t, T_i, T_j) &= \frac{1}{P(t, T_i, T_j)} \sum_{k=i}^{j-1} (T_{k+1} - T_k) P(t, T_{k+1}) L(t, T_k, T_{k+1}) \\ &= \frac{P(t, T_i) - P(t, T_j)}{P(t, T_i, T_j)}. \end{aligned} \quad (9.11)$$

□

显然满足命题 9.4 的关于互换率的简单表达式不能由 (9.10) 定义的标准 (即非 LIBOR) 利率得到。

远期互换率 $S(t, T_i, T_j)$ 同样满足

$$P(t, T_i) - P(t, T_j) - S(t, T_i, T_j) \sum_{k=i}^{j-1} (T_{k+1} - T_k) P(t, T_{k+1}) = 0, \quad (9.12)$$

$$0 \leq t \leq T_i, 1 \leq i < j \leq n.$$

当 $j = i + 1$ 时, 互换率 $S(t, T_i, T_{i+1})$ 与远期利率 $L(t, T_i, T_{i+1})$ 一致:

$$S(t, T_i, T_{i+1}) = L(t, T_i, T_{i+1}), \quad 1 \leq i \leq n - 1, \quad (9.13)$$

且债券价格 $P(t, T_i)$ 可以通过以下的关系式由远期互换率 $S(t, T_i, T_j)$ 得到

$$P(t, T_{i+1}) = \frac{P(t, T_i)}{1 + (T_{i+1} - T_i) S(t, T_i, T_{i+1})},$$

且

$$P(t, T_j) = \frac{P(t, T_i) - S(t, T_i, T_j) \sum_{k=i}^{j-2} (T_k - T_{k-1}) P(t, T_{k+1})}{1 + (T_j - T_{j-1}) S(t, T_i, T_j)},$$

$$0 \leq t \leq T_i, 1 \leq i < j \leq n.$$

§9.6 远期互换率测度

在本节中我们介绍在互换期权中用到的远期测度, 并讨论其相关性质。

定义 9.3. 远期互换测度 $\mathbb{P}_{i,j}$ 定义为

$$\frac{d\mathbb{P}_{i,j}}{d\mathbb{P}} = e^{-\int_0^{T_i} r_s ds} \frac{P(T_i, T_i, T_j)}{P(0, T_i, T_j)},$$

$1 \leq i < j \leq n$.

由命题 9.3, 我们有

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\frac{d\mathbb{P}_{i,j}}{d\mathbb{P}} \mid \mathcal{F}_t \right] &= \frac{1}{P(0, T_i, T_j)} \mathbb{E} \left[e^{-\int_0^{T_i} r_s ds} P(T_i, T_i, T_j) \mid \mathcal{F}_t \right] \\ &= \frac{P(t, T_i, T_j)}{P(0, T_i, T_j)} e^{-\int_0^t r_s ds}, \quad 0 \leq t \leq T_i. \end{aligned}$$

命题 9.5.

$$\frac{d\mathbb{P}_{i,j}|\mathcal{F}_t}{d\mathbb{P}_{i,j}} = e^{-\int_t^{T_i} r_s ds} \frac{P(T_i, T_i, T_j)}{P(t, T_i, T_j)}, \quad 0 \leq t \leq T_i \quad (9.14)$$

成立。

Proof. 要证明本命题, 只需证明对于所有的可积随机变量 F 有

$$\mathbb{E}_{i,j}[F|\mathcal{F}_t] = \mathbb{E} \left[F e^{-\int_t^{T_i} r_s ds} \frac{P(T_i, T_i, T_j)}{P(t, T_i, T_j)} \mid \mathcal{F}_t \right]. \quad (9.15)$$

现在, 对于任意的有界且 $\mathcal{F}_t$ -可测的随机变量 G 我们有

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[G F P(T_i, T_i, T_j) e^{-\int_t^{T_i} r_s ds} \right] &= P(0, T_i, T_j) \mathbb{E}_{i,j} \left[G F e^{\int_0^t r_s ds} \right] \\ &= P(0, T_i, T_j) \mathbb{E}_{i,j} \left[G e^{\int_0^t r_s ds} \mathbb{E}_{i,j} [F|\mathcal{F}_t] \right] \\ &= \mathbb{E} \left[G P(T_i, T_i, T_j) e^{-\int_0^{T_i} r_s ds} e^{\int_0^t r_s ds} \mathbb{E}_{i,j} [F|\mathcal{F}_t] \right] \\ &= \mathbb{E} \left[G P(T_i, T_i, T_j) e^{-\int_t^{T_i} r_s ds} \mathbb{E}_{i,j} [F|\mathcal{F}_t] \right] \\ &= \mathbb{E} \left[G \mathbb{E} \left[P(T_i, T_i, T_j) e^{-\int_t^{T_i} r_s ds} \mid \mathcal{F}_t \right] \mathbb{E}_{i,j} [F|\mathcal{F}_t] \right] \\ &= \mathbb{E} [G P(t, T_i, T_j) \mathbb{E}_{i,j} [F|\mathcal{F}_t]], \end{aligned}$$

其中我们应用了命题 9.3, 由条件期望的特征(11.3)就证明了(9.15)式。

□

作为命题 9.5的结果我们同样有

$$\frac{d\mathbb{P}_{i,j}|\mathcal{F}_t}{d\mathbb{P}_k|\mathcal{F}_t} = P(t, T_k) e^{-\int_{T_k}^{T_i} r_s ds} \frac{P(T_i, T_i, T_j)}{P(t, T_i, T_j)}, \quad 0 \leq t \leq T_i \wedge T_k,$$

因此在 $t = 0$ 时,

$$\frac{d\mathbb{P}_{i,j}}{d\mathbb{P}_k} = \frac{P(0, T_k)}{P(0, T_i, T_j)} e^{-\int_{T_k}^{T_i} r_s ds} P(T_i, T_i, T_j), \quad (9.16)$$

$1 \leq i < j \leq n$. 我们同样得到以下的结果, 它是命题 7.2 和 9.2 的推广。

命题 9.6. 对于所有的 $1 \leq i < j \leq n$ 和 $1 \leq k \leq n$ 我们有

$$\mathbb{E}_{i,j} \left[\frac{d\mathbb{P}_k}{d\mathbb{P}_{i,j}} \mid \mathcal{F}_t \right] = \frac{P(0, T_i, T_j)}{P(0, T_k)} \frac{P(t, T_k)}{P(t, T_i, T_j)} \quad 0 \leq t \leq T_i \wedge T_k, \quad (9.17)$$

且

$$\mathbb{E}_k \left[\frac{d\mathbb{P}_{i,j}}{d\mathbb{P}_k} \mid \mathcal{F}_t \right] = \frac{P(0, T_k)}{P(0, T_i, T_j)} \frac{P(t, T_i, T_j)}{P(t, T_k)} \quad 0 \leq t \leq T_i \wedge T_k. \quad (9.18)$$

特别地, 过程

$$t \mapsto v_k^{i,j}(t) := \frac{P(t, T_k)}{P(t, T_i, T_j)}$$

是一个在 $\mathbb{P}_{i,j}$ 下的 $\mathcal{F}_t$ -鞅, 且

$$t \mapsto v_{i,j}^k(t) := \frac{P(t, T_i, T_j)}{P(t, T_k)}$$

是一个在 $\mathbb{P}_k$ 下的 $\mathcal{F}_t$ -鞅。

Proof. 对于所有有界且 $\mathcal{F}_t$ -可测的随机变量 F 我们有

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{i,j} \left[F \frac{d\mathbb{P}_k}{d\mathbb{P}_{i,j}} \right] &= \mathbb{E} \left[F \frac{d\mathbb{P}_k}{d\mathbb{P}} \right] \\ &= \frac{1}{P(0, T_k)} \mathbb{E} \left[F e^{-\int_0^{T_k} r_u du} \right] \\ &= \frac{1}{P(0, T_k)} \mathbb{E} \left[F e^{-\int_0^t r_u du} P(t, T_k) \right] \\ &= \frac{1}{P(0, T_k)} \mathbb{E} \left[F e^{-\int_0^{T_i} r_u du} P(T_i, T_i, T_j) \frac{P(t, T_k)}{P(t, T_i, T_j)} \right] \end{aligned}$$

$$= \frac{P(0, T_i, T_j)}{P(0, T_k)} \mathbb{E}_{i,j} \left[F \frac{P(t, T_k)}{P(t, T_i, T_j)} \right],$$

这就证明了 (9.17). 类似地我们有

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_k \left[F \frac{d\mathbb{P}_{i,j}}{d\mathbb{P}_k} \right] &= \mathbb{E} \left[F \frac{d\mathbb{P}_{i,j}}{d\mathbb{P}} \right] \\ &= \frac{1}{P(0, T_i, T_j)} \mathbb{E} \left[F e^{-\int_0^{T_i} r_u du} P(T_i, T_i, T_j) \right] \\ &= \frac{1}{P(0, T_i, T_j)} \mathbb{E} \left[F e^{-\int_0^t r_u du} P(t, T_i, T_j) \right] \\ &= \frac{1}{P(0, T_i, T_j)} \mathbb{E} \left[F e^{-\int_0^{T_k} r_u du} \frac{P(T_k, T_k)}{P(t, T_k)} P(t, T_i, T_j) \right] \\ &= \frac{P(0, T_k)}{P(0, T_i, T_j)} \mathbb{E}_k \left[F \frac{P(t, T_i, T_j)}{P(t, T_k)} \right], \end{aligned}$$

这就证明了 (9.18)。 $t \mapsto v_k^{i,j}(t)$ 和 $t \mapsto v_{i,j}^k(t)$ 分别为 $\mathbb{P}_{i,j}$ 和 $\mathbb{P}_k$ 下的鞅的事实可由附录 A 中命题 11.2 之后的注解得到。 $\square$

由命题 9.6 可知, 互换率

$$\begin{aligned} S(t, T_i, T_j) &= \frac{P(t, T_i) - P(t, T_j)}{P(t, T_i, T_j)} \\ &= v_i^{i,j}(t) - v_j^{i,j}(t), \quad 0 \leq t \leq T_i, \end{aligned}$$

是一个在 $\mathbb{P}_{i,j}$ 下的鞅, 这同样也由附录 A 中命题 11.2 之后的注解得到。更确切地说, 我们可以构造一个在 $\mathbb{P}_{i,j}$ 下的标准布朗运动 $(B_t^{i,j})_{t \in \mathbb{R}_+}$ 作为 $S(t, T_i, T_j)$ 随机变化的驱动, 参见 命题 9.7 和下面的 9.8。前面我们令 $\delta_k = T_{k+1} - T_k$, $k = 1, \dots, n-1$.

命题 9.7. 对于所有的 $i, j = 1, \dots, n$, 过程

$$B_t^{i,j} := B_t - \sum_{l=i}^{j-1} \delta_l \int_0^t v_{l+1}^{i,j}(s) \zeta_{l+1}(s) ds, \quad 0 \leq t \leq T_i, \quad (9.19)$$

是一个在 $\mathbb{P}_{i,j}$ 下的标准布朗运动。

Proof. 由伊藤计算我们有, 对于所有的 $i, j = 1, \dots, n$,

$$dv_k^{i,j}(t) = d \left(\frac{P(t, T_k)}{P(t, T_i, T_j)} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{dP(t, T_k)}{P(t, T_i, T_j)} - \frac{P(t, T_k)}{P(t, T_i, T_j)^2} dP(t, T_i, T_j) + \frac{P(t, T_k)}{P(t, T_i, T_j)^3} |dP(t, T_i, T_j)|^2 \\
&\quad - \frac{1}{P(t, T_i, T_j)^2} dP(t, T_k) \cdot dP(t, T_i, T_j) \\
&= \frac{dP(t, T_k)}{P(t, T_i, T_j)} - \frac{P(t, T_k)}{P(t, T_i, T_j)^2} \sum_{l=i}^{j-1} \delta_l dP(t, T_{l+1}) + \frac{P(t, T_k)}{P(t, T_i, T_j)^3} |dP(t, T_i, T_j)|^2 \\
&\quad - \frac{1}{P(t, T_i, T_j)^2} dP(t, T_k) \cdot dP(t, T_i, T_j) \\
&= \frac{P(t, T_k)}{P(t, T_i, T_j)} (r_t dt + \zeta_k(t) dB_t) \\
&\quad - \frac{P(t, T_k)}{P(t, T_i, T_j)^2} \sum_{l=i}^{j-1} \delta_l P(t, T_{l+1}) (r_t dt + \zeta_{l+1}(t) dB_t) \\
&\quad + \frac{P(t, T_k)}{P(t, T_i, T_j)^3} \sum_{l, l'=i}^{j-1} \delta_l \delta_{l'} P(t, T_{l+1}) P(t, T_{l'+1}) \zeta_{l+1}(t) \zeta_{l'+1}(t) dt \\
&\quad - \frac{P(t, T_k) \zeta_k(t)}{P(t, T_i, T_j)^2} \sum_{l=i}^{j-1} \delta_l \zeta_{l+1}(t) P(t, T_{l+1}) dt \\
&= v_k^{i,j}(t) \left(\zeta_k(t) dB_t - \sum_{l=i}^{j-1} \delta_l v_{l+1}^{i,j}(t) \zeta_{l+1}(t) dB_t \right. \\
&\quad \left. + \sum_{l, l'=i}^{j-1} \delta_l \delta_{l'} v_{l+1}^{i,j}(t) v_{l'+1}^{i,j}(t) \zeta_{l+1}(t) \zeta_{l'+1}(t) dt - \zeta_k(t) \sum_{l=i}^{j-1} \delta_l \zeta_{l+1}(t) v_{l+1}^{i,j}(t) dt \right) \\
&= v_k^{i,j}(t) \left(\sum_{l=i}^{j-1} \delta_l v_{l+1}^{i,j}(t) (\zeta_k(t) - \zeta_{l+1}(t)) dB_t \right. \\
&\quad \left. + \sum_{l, l'=i}^{j-1} \delta_l \delta_{l'} v_{l+1}^{i,j}(t) v_{l'+1}^{i,j}(t) (\zeta_{l+1}(t) - \zeta_k(t)) \zeta_{l'+1}(t) dt \right) \\
&= v_k^{i,j}(t) \sum_{l=i}^{j-1} \delta_l v_{l+1}^{i,j}(t) (\zeta_k(t) - \zeta_{l+1}(t)) \left(dB_t - \sum_{l'=i}^{j-1} \delta_{l'} v_{l'+1}^{i,j}(t) \zeta_{l'+1}(t) dt \right) \\
&= v_k^{i,j}(t) \left(\sum_{l=i}^{j-1} \delta_l v_{l+1}^{i,j}(t) (\zeta_k(t) - \zeta_{l+1}(t)) \right) dB_t^{i,j}.
\end{aligned}$$

由于 $t \mapsto v_k^{i,j}(t)$ 是一个连续鞅，定义在(9.19)的 $B_t^{i,j}$ 是一个在 $\mathbb{P}_{i,j}$ 下的标准布朗运动。 $\square$

当 $j = i + 1$ 时, 关系式 (9.19) 表明

$$B^{i,i+1}(t) = B_t - \int_0^t \zeta_{i+1}(s) ds, \quad 0 \leq t \leq T_i,$$

由于 $v_{i+1}^{i,i+1}(t) = 1/\delta_i$, 因此由关系式 (9.3) 我们得到

$$(B_t^{i,i+1})_{t \in [0, T_i]} = (B_t^{i+1})_{t \in [0, T_i]}. \quad (9.20)$$

由命题(9.19)等式在直到时刻 T_i 时都是成立的我们有

$$\mathbb{E}_{i,i+1} \left[\frac{d\mathbb{P}_{i,i+1}}{d\mathbb{P}_{i+1}} \mid \mathcal{F}_t \right] = 1, \quad 0 \leq t \leq T_i, \quad (9.21)$$

虽然由(9.16)我们有

$$\frac{d\mathbb{P}_{i,i+1}}{d\mathbb{P}_{i+1}} = P(T_i, T_{i+1}) e^{\int_{T_i}^{T_{i+1}} r_s ds},$$

因此 $\mathbb{P}_{i,i+1} \neq \mathbb{P}_i$.

我们现在用在[Sch05]17页中的布朗运动 $(B_t^{i,j})_{t \in \mathbb{R}_+}$ 计算在 $\mathbb{P}_{i,j}$ 下的互换率动态。

命题 9.8.

$$dS(t, T_i, T_j) = S(t, T_i, T_j) \sigma_{i,j}(t) dB_t^{i,j}, \quad 0 \leq t \leq T_i,$$

成立, 其中互换率波动率为

$$\sigma_{i,j}(t) = \sum_{l=i}^{j-1} \delta_l v_{l+1}^{i,j}(t) (\zeta_i(t) - \zeta_{l+1}(t)) + \frac{P(t, T_j)}{P(t, T_i) - P(t, T_j)} (\zeta_i(t) - \zeta_j(t)),$$

$$1 \leq i, j \leq n.$$

Proof. 由 命题 9.7 的证明我们有

$$dv_k^{i,j}(t) = v_k^{i,j}(t) \left(\sum_{l=i}^{j-1} \delta_l v_{l+1}^{i,j}(t) (\zeta_k(t) - \zeta_{l+1}(t)) \right) dB_t^{i,j},$$

因此

$$dS(t, T_i, T_j) = d \left(\frac{P(t, T_i) - P(t, T_j)}{P(t, T_i, T_j)} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= dv_i^{i,j}(t) - dv_j^{i,j}(t) \\
&= \left(\sum_{l=i}^{j-1} \delta_l v_{l+1}^{i,j}(t) (v_i^{i,j}(t) (\zeta_i(t) - \zeta_{l+1}(t)) - v_j^{i,j}(t) (\zeta_j(t) - \zeta_{l+1}(t))) \right) dB_t^{i,j} \\
&= \left(\sum_{l=i}^{j-1} \zeta_{l+1}(t) \delta_l v_{l+1}^{i,j}(t) (v_j^{i,j}(t) - v_i^{i,j}(t)) \right) dB_t^{i,j} \\
&\quad + (v_i^{i,j}(t) \zeta_i(t) - v_j^{i,j}(t) \zeta_j(t)) dB_t^{i,j} \\
&= \left(\sum_{l=i}^{j-1} (\zeta_{l+1}(t) - \zeta_i(t)) \delta_l v_{l+1}^{i,j}(t) (v_j^{i,j}(t) - v_i^{i,j}(t)) \right) dB_t^{i,j} \\
&\quad + v_j^{i,j}(t) (\zeta_i(t) - \zeta_j(t)) dB_t^{i,j} \\
&= S(t, T_i, T_j) \left(\sum_{l=i}^{j-1} \delta_l v_{l+1}^{i,j}(t) (\zeta_i(t) - \zeta_{l+1}(t)) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{P(t, T_j)}{P(t, T_i) - P(t, T_j)} (\zeta_i(t) - \zeta_j(t)) \right) dB_t^{i,j} \\
&= S(t, T_i, T_j) \sigma_{i,j}(t) dB_t^{i,j}.
\end{aligned}$$

□

作为命题 9.8 和推论 1.1 的一个结果，我们可以得出互换率 $S(t, T_i, T_j)$ 是远期互换率测度 $\mathbb{P}_{i,j}$ 下鞅的事实。

在 10 章中我们将用命题 9.8 中得到的互换率动态，通过 Black-Scholes 公式和互换率波动率 $\sigma_{i,j}(t)$ 的渐近估计来计算互换期权的价格。

§9.7 LIBOR 模型中的互换期权定价

由 $P(t, T_i, T_j)$ 的定义 (9.5) 可知，定义了远期互换率 $S(t, T_i, T_j)$ 关系式

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=i}^{j-1} (T_{k+1} - T_k) P(t, T_{k+1}) (L(t, T_k, T_{k+1}) - S(t, T_i, T_j)) \\
&= P(t, T_i) - P(t, T_j) - S(t, T_i, T_j) \sum_{k=i}^{j-1} (T_{k+1} - T_k) P(t, T_{k+1}) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

证明了

$$\begin{aligned}
 & \sum_{k=i}^{j-1} (T_{k+1} - T_k) P(t, T_{k+1}) L(t, T_k, T_{k+1}) \\
 &= S(t, T_i, T_j) \sum_{k=i}^{j-1} (T_{k+1} - T_k) P(t, T_{k+1}) \\
 &= P(t, T_i, T_j) S(t, T_i, T_j) \\
 &= P(t, T_i) - P(t, T_j),
 \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}
 & \sum_{k=i}^{j-1} (T_{k+1} - T_k) P(t, T_{k+1}) (L(t, T_k, T_{k+1}) - \kappa) \\
 &= P(t, T_i, T_j) (S(t, T_i, T_j) - \kappa).
 \end{aligned}$$

特别地对于 $t = T_i$ 我们有

$$\begin{aligned}
 & \left(\sum_{k=i}^{j-1} (T_{k+1} - T_k) P(T_i, T_{k+1}) (L(T_i, T_k, T_{k+1}) - \kappa) \right)^+ \\
 &= (P(T_i, T_i) - P(T_i, T_j) - \kappa P(T_i, T_i, T_j))^+ \\
 &= P(t, T_i, T_j) (S(T_i, T_i, T_j) - \kappa)^+.
 \end{aligned}$$

由此，LIBOR市场中的互换期权可以通过(9.9)计算其价格，对于时刻 $t \in [0, T_i]$ ，在远期测度 $\mathbb{P}_i$ 下有

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{E} \left[e^{-\int_t^{T_i} r_s ds} \left(\sum_{k=i}^{j-1} (T_{k+1} - T_k) P(T_i, T_{k+1}) (L(T_i, T_k, T_{k+1}) - \kappa) \right)^+ \mid \mathcal{F}_t \right] \\
 &= \mathbb{E} \left[e^{-\int_t^{T_i} r_s ds} (P(T_i, T_i) - P(T_i, T_j) - \kappa P(T_i, T_i, T_j))^+ \mid \mathcal{F}_t \right] \\
 &= \mathbb{E} \left[e^{-\int_t^{T_i} r_s ds} P(T_i, T_i, T_j) (S(T_i, T_i, T_j) - \kappa)^+ \mid \mathcal{F}_t \right] \\
 &= P(t, T_i) \mathbb{E}_i \left[P(T_i, T_i, T_j) (S(T_i, T_i, T_j) - \kappa)^+ \mid \mathcal{F}_t \right].
 \end{aligned}$$

最后，由命题 9.5 我们也可以写出

$$\mathbb{E} \left[e^{-\int_t^{T_i} r_s ds} \left(\sum_{k=i}^{j-1} (T_{k+1} - T_k) P(T_i, T_{k+1}) (L(T_i, T_k, T_{k+1}) - \kappa) \right)^+ \mid \mathcal{F}_t \right]$$

$$\begin{aligned}
&= \mathbb{E} \left[e^{-\int_t^{T_i} r_s ds} P(T_i, T_i, T_j) (S(T_i, T_i, T_j) - \kappa)^+ \mid \mathcal{F}_t \right] \\
&= P(t, T_i, T_j) \mathbb{E}_{i,j} \left[(S(T_i, T_i, T_j) - \kappa)^+ \mid \mathcal{F}_t \right], \quad (9.22)
\end{aligned}$$

其中远期测度 $\mathbb{P}_{i,j}$ 如(9.14)所定义。

§9.8 练习

练习 9.1. 考虑一个市场，其中有三种到期日分别为 $T_1 = \delta$, $T_2 = 2\delta$ 和 $T_3 = 3\delta$ ，价格分别为 $P(t, T_1)$, $P(t, T_2)$ 和 $P(t, T_3)$ 的零息债券和定义分别为

$$L(t, T_i, T_{i+1}) = \frac{1}{\delta} \left(\frac{P(t, T_i)}{P(t, T_{i+1})} - 1 \right), \quad i = 1, 2$$

的远期 LIBOR $L(t, T_1, T_2)$ 和 $L(t, T_2, T_3)$ 。假设 $L(t, T_1, T_2)$ 和 $L(t, T_2, T_3)$ 被模拟为

$$\frac{dL(t, T_1, T_2)}{L(t, T_1, T_2)} = \gamma_1(t) dB_t^2, \quad 0 \leq t \leq T_2, \quad (9.23)$$

且 $L(t, T_2, T_3) = b$, $0 \leq t \leq T_1$ ，对于某常数 $b > 0$ 和函数 $\gamma_1(t)$ ，其中 B_t^2 是在定义为

$$\frac{d\mathbb{P}_2}{d\mathbb{P}} = \frac{e^{-\int_0^{T_2} r_s ds}}{P(0, T_2)}$$

的远期利率测度 $\mathbb{P}_2$ 下的标准布朗运动。

1. 通过解方程(9.23)来计算 $L(t, T_1, T_2)$, $0 \leq t \leq T_2$ 。

2. 计算敲定价格为 κ 的利率上限在时刻 t 的价格:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E} \left[e^{-\int_t^{T_{i+1}} r_s ds} (L(T_i, T_i, T_{i+1}) - \kappa)^+ \mid \mathcal{F}_t \right] \\
&= P(t, T_i) \mathbb{E}_{i+1} \left[(L(T_i, T_i, T_{i+1}) - \kappa)^+ \mid \mathcal{F}_t \right], \quad 0 \leq t \leq T_i,
\end{aligned}$$

其中 $\mathbb{E}_{i+1}$ 表示在远期测度 $\mathbb{P}_{i+1}$, $i = 1, 2$ 下的期望。

3. 计算关于 b 和 $L(t, T_1, T_2)$ 的

$$\frac{P(t, T_1)}{P(t, T_1, T_3)}, \quad 0 \leq t \leq T_1, \quad \text{and} \quad \frac{P(t, T_3)}{P(t, T_1, T_3)}, \quad 0 \leq t \leq T_2,$$

其中 $P(t, T_1, T_3)$ 是年计价单位

$$P(t, T_1, T_3) = \delta P(t, T_2) + \delta P(t, T_3), \quad 0 \leq t \leq T_2.$$

4. 计算互换率的动态

$$t \mapsto S(t, T_1, T_3) = \frac{P(t, T_1) - P(t, T_3)}{P(t, T_1, T_3)}, \quad 0 \leq t \leq T_2,$$

即证明

$$dS(t, T_1, T_3) = \sigma_{1,3}(t)S(t, T_1, T_3)dB_t^2,$$

其中 $\sigma_{1,3}(t)$ 是一个待定随机过程。

练习 9.2. 考虑一个市场，其中有短期利率 $(r_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ 和两个零息债券 $P(t, T_1), P(t, T_2)$ 到期日分别为 $T_1 = \delta$ 和 $T_2 = 2\delta$, 其中 $P(t, T_i)$ 是通过

$$\frac{dP(t, T_i)}{P(t, T_i)} = r_t dt + \zeta_i(t) dB_t, \quad i = 1, 2$$

模拟的。同时考虑定义为

$$L(t, T_1, T_2) = \frac{1}{\delta} \left(\frac{P(t, T_1)}{P(t, T_2)} - 1 \right), \quad 0 \leq t \leq T_1,$$

的远期 LIBOR $L(t, T_1, T_2)$ 且假设 $L(t, T_1, T_2)$ 如BGM模型被模拟为

$$\frac{dL(t, T_1, T_2)}{L(t, T_1, T_2)} = \gamma dB_t^2, \quad 0 \leq t \leq T_1, \quad (9.24)$$

其中 γ 是一个确定的常数，且

$$B_t^2 = B_t - \int_0^t \zeta_2(s) ds$$

是一个在远期测度 $\mathbb{P}_2$ 下定义为

$$\frac{d\mathbb{P}_2}{d\mathbb{P}} = \exp \left(\int_0^{T_2} \zeta_2(s) dB_s - \frac{1}{2} \int_0^{T_2} |\zeta_2(s)|^2 ds \right)$$

的标准布朗运动。

1. 通过解方程 (9.24) 计算 $L(t, T_1, T_2)$.
2. 计算敲定价格为 κ 的利率上限在时刻 t 的价格:

$$P(t, T_2) \mathbb{E}_2 \left[(L(T_1, T_1, T_2) - \kappa)^+ \mid \mathcal{F}_t \right], \quad 0 \leq t \leq T_1,$$

其中 $\mathbb{E}_2$ 表示在远期测度 $\mathbb{P}_2$ 下的期望。

练习 9.3. (练习 7.3 续).

1. 计算互换率过程

$$S(t, T_1, T_2) = \frac{P(t, T_1) - P(t, T_2)}{(T_2 - T_1)P(t, T_2)}, \quad t \in [0, T_1]$$

在 $\mathbb{P}_2$ 下的动态。

2. 利用在远期互换测度 $\mathbb{P}_{1,2}$ 下的期望，计算关于LIBOR利率 $L(T_1, T_1, T_2)$ 的互换期权价格

$$(T_2 - T_1) \mathbb{E} \left[e^{-\int_t^{T_1} r_s ds} P(T_1, T_2) (L(T_1, T_1, T_2) - \kappa)^+ \mid \mathcal{F}_t \right].$$

第十章 Brace–Gatarek–Musiela (BGM) 模型

本章致力于讲述BGM模型，它是由漂移几何布朗运动驱动的关于LIBOR率的非线性模型，并且不像HJM模型而是保证了利率恒为正数。在建立了BGM模型之后，我们将给出根据[Sch05]的方法来界定该模型的要点。

§10.1 BGM 模型

BGM 模型在 [BGM97]中被引入来对LIBOR市场中如利率上限和互换期权等利率衍生产品进行定价。

在前面章节中所介绍的模型(如HJM模型, 仿射模型等)有以下的缺点:

- 能精确计算的模型如Vasicek模型不满足利率恒为正数的性质。
- 保证利率恒为正数的模型（如CIR模型）不能得到显式的解析式。
- 没有显示的解析式就意味着要用Monte Carlo方法来进行定价，这使得实际应用中难以进行模型的界定。
- 这些模型中的远期利率的拟合都有问题。

因此寻找一个具有以下性质的模型就变得很有意义:

- 保证利率的正值
- 可推导出显式的定价公式。

这两个目标可以通过BGM模型来实现。设债券价格 $P(t, T_i)$ 满足

$$\frac{dP(t, T_i)}{P(t, T_i)} = r_t dt + \zeta_i(t) dB_t, \quad i, \dots, n, \quad (10.1)$$

其中 B_t 是一个 $\mathbb{P}$ 下的标准的布朗运动。

对于 $i = 1, \dots, n$, 过程

$$B_t^i := B_t - \int_0^t \zeta_i(s) ds, \quad 0 \leq t \leq T_i,$$

是在 9.1 定义的概率 $\mathbb{P}_i$ 下标准的 $\mathbb{R}^d$ -值布朗运动。

在BGM模型中我们假设 $L(t, T_i, T_{i+1})$ 是 $\mathbb{P}_{i+1}$ 的标准几何布朗运动, 即

$$\frac{dL(t, T_i, T_{i+1})}{L(t, T_i, T_{i+1})} = \gamma_i(t) dB_t^{i+1}, \quad (10.2)$$

$0 \leq t \leq T_i$, $i = 1, \dots, n-1$, 对于确定函数 $\gamma_i(t)$, $i = 1, \dots, n-1$, 其解为

$$L(u, T_i, T_{i+1}) = L(t, T_i, T_{i+1}) \exp \left(\int_t^u \gamma_i(s) dB_s^{i+1} - \frac{1}{2} \int_t^u |\gamma_i|^2(s) ds \right),$$

即对于 $u = T_i$,

$$L(T_i, T_i, T_{i+1}) = L(t, T_i, T_{i+1}) \exp \left(\int_t^{T_i} \gamma_i(s) dB_s^{i+1} - \frac{1}{2} \int_t^{T_i} |\gamma_i|^2(s) ds \right).$$

由于 $L(t, T_i, T_{i+1})$ 是一个在 $\mathbb{P}_{i+1}$, $i = 0, \dots, n-1$ 下的几何布朗运动, 标准利率上限单元在时刻 $t \in [0, T_i]$ 的价格可以由Black-Scholes计算出来, 参见下面的第 §10.2 节。

现在我们来确定在 $\mathbb{P}$ 下的 $L(t, T_i, T_{i+1})$ 的动态。再令

$$\delta_k = T_{k+1} - T_k, \quad k = 1, \dots, n-1.$$

命题 10.1. 对于 $1 \leq i < n$ 有

$$\frac{dL(t, T_i, T_{i+1})}{L(t, T_i, T_{i+1})} = -\gamma_i(t) \sum_{j=i+1}^{n-1} \frac{\delta_j \gamma_j(t) L(t, T_j, T_{j+1})}{1 + \delta_j L(t, T_j, T_{j+1})} dt + \gamma_i(t) dB_t^n, \quad (10.3)$$

$0 \leq t \leq T_i$, 七种 $\gamma_i(t)$ 是一个确定的函数, $(B_t^n)_{t \in \mathbb{R}_+}$ 是 $\mathbb{P}_n$ 下的标准布朗运动, 且 $L(t, T_i, T_{i+1})$, $0 \leq t \leq T_i$, 是 $\mathbb{P}_{i+1}$, $i = 1, \dots, n-1$ 下的鞅。

Proof. 我们有

$$\begin{aligned}
 d\left(\frac{P(t, T_i)}{P(t, T_{i+1})}\right) &= d(1 + \delta_i L(t, T_i, T_{i+1})) \\
 &= \delta_i L(t, T_i, T_{i+1}) \gamma_i(t) dB_t^{i+1} \\
 &= \frac{P(t, T_i)}{P(t, T_{i+1})} \frac{\delta_i L(t, T_i, T_{i+1})}{1 + \delta_i L(t, T_i, T_{i+1})} \gamma_i(t) dB_t^{i+1}. \quad (10.4)
 \end{aligned}$$

在另一方面, 利用动态

$$\frac{dP(t, T_i)}{P(t, T_i)} = r_t dt + \zeta_i(t) dB_t, \quad i = 1, \dots, n,$$

和伊藤公式, 我们有

$$\begin{aligned}
 d\left(\frac{P(t, T_i)}{P(t, T_{i+1})}\right) &= \frac{P(t, T_i)}{P(t, T_{i+1})} (\zeta_i(t) - \zeta_{i+1}(t)) (dB_t - \zeta_{i+1}(t) dt) \\
 &= \frac{P(t, T_i)}{P(t, T_{i+1})} (\zeta_i(t) - \zeta_{i+1}(t)) dB_t^{i+1}. \quad (10.5)
 \end{aligned}$$

由(10.4)的证明 和(10.5)可得

$$\zeta_{i+1}(t) - \zeta_i(t) = -\frac{\delta_i L(t, T_i, T_{i+1}) \gamma_i(t)}{1 + \delta_i L(t, T_i, T_{i+1})},$$

$0 \leq t \leq T_i, i = 1, \dots, n-1$, 和

$$\begin{aligned}
 \frac{dL(t, T_i, T_{i+1})}{L(t, T_i, T_{i+1})} &= \gamma_i(t) dB_t^{i+1} \\
 &= \gamma_i(t) dB_t^i + \frac{\delta_i L(t, T_i, T_{i+1}) |\gamma_i|^2(t)}{1 + \delta_i L(t, T_i, T_{i+1})} dt.
 \end{aligned}$$

回顾前面我们有

$$dB_t^{i+1} = dB_t - \zeta_{i+1}(t) dt \text{ 和}$$

$$dB_t^{i+1} = dB_t^i - (\zeta_{i+1}(t) - \zeta_i(t)) dt, \quad 1 \leq i \leq n-1,$$

则我们有

$$\zeta_k(t) = \zeta_i(t) - \sum_{j=i}^{k-1} \frac{\delta_j L(t, T_j, T_{j+1}) \gamma_j(t)}{1 + \delta_j L(t, T_j, T_{j+1})}, \quad (10.6)$$

$0 \leq t \leq T_i$, $1 \leq i < k \leq n$, 并且对于 $k > i$,

$$\begin{aligned} \frac{dL(t, T_i, T_{i+1})}{L(t, T_i, T_{i+1})} &= \gamma_i(t) dB_t^{i+1} \\ &= \gamma_i(t) dB_t^k - \gamma_i(t) (dB_t^k - dB_t^{i+1}) \\ &= \gamma_i(t) dB_t^k - \sum_{j=i+1}^{k-1} \gamma_i(t) (\zeta_j(t) - \zeta_{j+1}(t)) dt \\ &= - \sum_{j=i+1}^{k-1} \frac{\delta_j L(t, T_j, T_{j+1})}{1 + \delta_j L(t, T_j, T_{j+1})} \gamma_i(t) \gamma_j(t) dt + \gamma_i(t) dB_t^k, \end{aligned}$$

$0 \leq t \leq T_i$. □

类似地, 对于 $1 \leq k \leq i < n$ 我们有:

$$\begin{aligned} \frac{dL(t, T_i, T_{i+1})}{L(t, T_i, T_{i+1})} &= \gamma_i(t) dB_t^k + \gamma_i(t) \sum_{j=k}^i (\zeta_j(t) - \zeta_{j+1}(t)) dt \\ &= \gamma_i(t) dB_t^k + \gamma_i(t) \sum_{j=k}^i \frac{\delta_j \gamma_j(t) L(t, T_j, T_{j+1})}{1 + \delta_j L(t, T_j, T_{j+1})} dt. \end{aligned}$$

§10.2 利率上限定价

作为关系式 (10.2) 和 Black-Scholes 公式的结果 损益为

$$(L(T_i, T_i, T_{i+1}) - \kappa)^+$$

的利率上限在时刻 $t \in [0, T_i]$ 的价格可计算为

$$\begin{aligned} &P(t, T_{i+1}) \mathbb{E}_{i+1} [(L(T_i, T_i, T_{i+1}) - \kappa)^+ | \mathcal{F}_t] \\ &= P(t, T_{i+1}) \text{Bl}(\kappa, L(t, T_i, T_{i+1}), \sigma_i(t), 0, T_i - t), \end{aligned}$$

其中 $\text{Bl}(\kappa, x, \sigma, r, \tau)$ 是定义在 §2.3 节中的 Black-Scholes 函数, 其中

$$|\sigma_i(t)|^2 = \frac{1}{T_i - t} \int_t^{T_i} |\gamma_i|^2(s) ds. \quad (10.7)$$

反过来由 Black-Scholes 公式可计算出市场数据所隐含的利率上限的波动率 $\sigma_i^B(t)$ 。在图 10.1 的表格给出了这种隐含波动率, 其中离到期日的时间 $T_i - t$ 为纵坐标, 期限结构的时间段 $T_j - T_i$ 为横坐标。

Vol Cap At the Money										
	1M	3M	6M	12M	2Y	3Y	4Y	5Y	7Y	10Y
2D	9.25	9	8.85	8.6	18	16.8	15.7	14.7	13	11.3
1M	15.35	15.1	14.95	17.6	18.03	16.83	15.73	14.73	13.03	11.33
2M	15.75	15.5	15.35	18.1	18.41	17.11	16.01	15.01	13.26	11.56
3M	15.55	15.3	15.15	18.6	18.79	17.39	16.29	15.29	13.49	11.79
6M	17.55	17.3	17.15	18.7	18.28	16.98	15.88	14.98	13.48	11.98
9M	18.35	18.1	17.95	18.3	17.76	16.56	15.51	14.66	13.31	12.01
1Y	19.25	19	18.85	17.9	17.25	16.15	15.15	14.35	13.15	12.05
2Y	17.85	17.6	17.45	16.3	15.96	15.16	14.46	13.86	12.96	12.06
3Y	16.8	16.55	16.4	15.2	15.38	14.58	13.98	13.58	12.88	12.18
4Y	15.6	15.35	15.2	14.4	14.79	14.19	13.69	13.29	12.79	12.29
5Y	14.65	14.4	14.25	13.4	14.5	13.97	13.53	13.2	12.8	12.4
6Y	13.8	13.55	13.45	12.85	14.19	13.66	13.17	12.89	12.54	12.14
7Y	13.35	13.1	13	12.3	13.88	13.35	12.81	12.58	12.28	11.88
8Y	13.1	12.85	12.75	11.97	13.65	13.15	12.65	12.42	12.12	11.75
9Y	12.75	12.5	12.4	11.63	13.43	12.96	12.49	12.26	11.96	11.63
10Y	12.4	12.15	12.05	11.3	13.5	13.02	12.53	12.25	11.89	11.5
12Y	11.85	11.6	11.5	10.8	13.22	12.75	12.28	12.01	11.69	11.3
15Y	11.25	11	10.9	10.2	13	12.55	12.1	11.85	11.57	11.15
20Y	10.45	10.2	10.1	9.5	11.9	11.55	11.2	11.05	11.03	10.8
25Y	9.7	9.45	9.35	8.8	11.68	11.33	10.98	10.83	10.88	10.55
30Y	9.05	8.8	8.7	8.1	11.45	11.1	10.75	10.6	10.72	10.3

图 10.1: 利率上限波动率

由于利率上限可以分解为利率上限单元之和，因此从利率上限单元的定价可推出损益

$$\sum_{k=i}^{j-1} (T_{k+1} - T_k) (L(T_k, T_k, T_{k+1}) - \kappa)^+$$

为的利率上限的价格，并且其在时刻 $t \in [0, T_i]$ 价格为

$$\sum_{k=i}^{j-1} \delta_k P(t, T_{k+1}) \text{Bl}(\kappa, L(t, T_k, T_{k+1}), \sigma_k(t), 0, T_k - t).$$

§10.3 互换期权定价

我们已经知道LIBOR市场中损益为

$$\left(\sum_{k=i}^{j-1} \delta_k P(T_i, T_{k+1}) (L(T_i, T_k, T_{k+1}) - \kappa) \right)^+$$

的互换期权在时刻 $t \in [0, T_i]$ 的价格

$$\begin{aligned} & P(t, T_i) \mathbb{E}_i \left[P(T_i, T_i, T_j) (S(T_i, T_i, T_j) - \kappa)^+ \mid \mathcal{F}_t \right] \\ &= P(t, T_i, T_j) \mathbb{E}_{i,j} \left[(S(T_i, T_i, T_j) - \kappa)^+ \mid \mathcal{F}_t \right], \end{aligned} \quad (10.8)$$

其中鞅测度 $\mathbb{P}_{i,j}$ 已经在(9.14)中定义为

$$\frac{d\mathbb{P}_{i,j|\mathcal{F}_t}}{d\mathbb{P}_{|\mathcal{F}_t}} = e^{-\int_t^{T_i} r_s ds} \frac{P(T_i, T_i, T_j)}{P(t, T_i, T_j)}, \quad 0 \leq t \leq T_i,$$

$1 \leq i < j \leq n$, 参见第 §9.7 节.

互换期权的价格可用 $\mathbb{P}_i$, $1 \leq i \leq k < j \leq n$ 下 $L(t, T_k, T_{k+1})$ 的动态通过 Monte Carlo 方法计算得到, 但在市场的实际操作却使用渐近公式。回顾前面定义的互换率 $S(t, T_i, T_j)$ 满足

$$S(t, T_i, T_j) = \frac{1}{P(t, T_i, T_j)} \sum_{k=i}^{j-1} (T_{k+1} - T_k) P(t, T_{k+1}) L(t, T_k, T_{k+1}), \quad (10.9)$$

其中

$$P(t, T_i, T_j) = \sum_{k=i}^{j-1} (T_{k+1} - T_k) P(t, T_{k+1})$$

是一个年计数器。更进一步, 定义为

$$t \mapsto v_k^{i,j}(t) := \frac{P(t, T_k)}{P(t, T_i, T_j)}, \quad 0 \leq t \leq T_i \wedge T_j,$$

的过程 $v_k^{i,j}$ 是一个在 $\mathbb{P}_{i,j}$, $1 \leq i, j \leq n$ 下的 $\mathcal{F}_t$ -鞅且由命题 9.6 和 9.7 我们有

$$dv_k^{i,j}(t) = v_k^{i,j}(t) \left(\sum_{l=i}^{j-1} \delta_l v_{l+1}^{i,j}(t) (\zeta_k(t) - \zeta_{l+1}(t)) \right) dB_t^{i,j},$$

其中对于所有的 $i, j = 1, \dots, n$, 过程

$$B_t^{i,j} := B_t - \sum_{k=i}^{j-1} \delta_k \int_0^t v_{k+1}^{i,j}(s) \zeta_{k+1}(s) ds, \quad 0 \leq t \leq T_i,$$

是在 $\mathbb{P}_{i,j}$ 下的标准布朗运动。

同时回顾命题 9.8 有

$$dS(t, T_i, T_j) = S(t, T_i, T_j) \sigma_{i,j}(t) dB_t^{i,j},$$

其中, 由关系式 (10.6), 互换率波动率 $\sigma_{i,j}(t)$ 可计算为

$$\sigma_{i,j}(t) = \sum_{l=i}^{j-1} \left(\delta_l v_{l+1}^{i,j}(t) (\zeta_i(t) - \zeta_{l+1}(t)) + \frac{P(t, T_j)}{P(t, T_i) - P(t, T_j)} (\zeta_i(t) - \zeta_j(t)) \right)$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{l=i}^{j-1} \delta_l v_{l+1}^{i,j}(t) \sum_{k=i}^l \frac{\gamma_k(t) \delta_k L(t, T_k, T_{k+1})}{1 + \delta_k L(t, T_k, T_{k+1})} \\
 &\quad + \frac{P(t, T_j)}{P(t, T_i) - P(t, T_j)} \sum_{k=i}^{j-1} \frac{\gamma_k(t) \delta_k L(t, T_k, T_{k+1})}{1 + \delta_k L(t, T_k, T_{k+1})} \\
 &= \sum_{k=i}^{j-1} \frac{\gamma_k(t) \delta_k L(t, T_k, T_{k+1})}{1 + \delta_k L(t, T_k, T_{k+1})} \sum_{l=k}^{j-1} \left(\delta_l v_{l+1}^{i,j}(t) + \frac{P(t, T_j)}{P(t, T_i) - P(t, T_j)} \right) \\
 &= \frac{1}{S(t, T_i, T_j)} \times \\
 &\quad \sum_{k=i}^{j-1} \frac{\gamma_k(t) \delta_k L(t, T_k, T_{k+1})}{1 + \delta_k L(t, T_k, T_{k+1})} \sum_{l=k}^{j-1} \left(\delta_l v_{l+1}^{i,j}(t) \frac{P(t, T_i) - P(t, T_j)}{P(t, T_i, T_j)} + \frac{P(t, T_j)}{P(t, T_i, T_j)} \right) \\
 &= \frac{1}{S(t, T_i, T_j)} \sum_{k=i}^{j-1} \gamma_k(t) w_k^{i,j}(t) L(t, T_k, T_{k+1}),
 \end{aligned}$$

且有

$$w_k^{i,j}(t) = \frac{\delta_k}{1 + \delta_k L(t, T_k, T_{k+1})} \left(\sum_{l=k}^{j-1} \delta_l v_{l+1}^{i,j}(t) \frac{P(t, T_i) - P(t, T_j)}{P(t, T_i, T_j)} + \frac{P(t, T_j)}{P(t, T_i, T_j)} \right),$$

和 $w_i^{i,i+1}(t) = 1$, 因此

$$\sigma_{i,j}^2(t) = \frac{1}{S(t, T_i, T_j)^2} \sum_{l=i}^{j-1} \sum_{k=i}^{j-1} \gamma_l(t) \gamma_k(t) w_l^{i,j}(t) w_k^{i,j}(t) L(t, T_l, T_{l+1}) L(t, T_k, T_{k+1}), \quad (10.10)$$

和 $\sigma_{i,i+1}(t) = \gamma_i(t)$, $i = 1, \dots, n-1$. 当 $j = i+1$ 时, 虽然

$$\begin{aligned}
 \frac{d\mathbb{P}_{i,i+1}|\mathcal{F}_t}{d\mathbb{P}|\mathcal{F}_t} &= e^{-\int_t^{T_i} r_s ds} \frac{P(T_i, T_i, T_{i+1})}{P(t, T_i, T_{i+1})} \\
 &= e^{-\int_t^{T_i} r_s ds} \frac{P(T_i, T_{i+1})}{P(t, T_{i+1})} \\
 &\neq \frac{e^{-\int_t^{T_{i+1}} r_s ds}}{P(t, T_{i+1})} \\
 &= \frac{d\mathbb{P}_{i+1}|\mathcal{F}_t}{d\mathbb{P}|\mathcal{F}_t}, \quad 0 \leq t \leq T_i,
 \end{aligned}$$

但由 (9.20), (9.21) 可知 $(B_t^{i,i+1})_{t \in [0, T_i]}$ 和 $(B_t^{i+1})_{t \in [0, T_i]}$ 一直到时刻 T_i 都是一

致的，且由 (9.13) 互换期权的价格(10.8)可计算为

$$\begin{aligned} & P(t, T_i, T_{i+1}) \mathbb{E}_{i,i+1} \left[(S(T_i, T_i, T_{i+1}) - \kappa)^+ \mid \mathcal{F}_t \right] \\ &= (T_{i+1} - T_i) P(t, T_{i+1}) \mathbb{E}_{i+1} \left[(S(T_i, T_i, T_{i+1}) - \kappa)^+ \mid \mathcal{F}_t \right] \\ &= (T_{i+1} - T_i) P(t, T_{i+1}) \mathbb{E}_{i+1} \left[(L(T_i, T_i, T_{i+1}) - \kappa)^+ \mid \mathcal{F}_t \right], \end{aligned}$$

它等于

$$P(t, T_{i+1}) \text{Bl}(\kappa, L(t, T_i, T_{i+1}), \sigma_i(t), 0, T_i - t), \quad (10.11)$$

其中 $\sigma_i(t)$ 定义与(10.7). 下一个命题将这个关系式推广到一般的指标 $1 \leq i < j \leq n$ 的渐近形式，被称为是互换期权的渐近公式。

命题 10.2. 互换期权的价格

$$P(t, T_i, T_j) \mathbb{E}_{i,j} \left[(S(T_i, T_i, T_j) - \kappa)^+ \mid \mathcal{F}_t \right]$$

可通过

$$P(t, T_i, T_j) \text{Bl}(\kappa, S(t, T_i, T_j), \tilde{\sigma}_{i,j}(t), 0, T_i - t) \quad (10.12)$$

渐近，其中

$$\begin{aligned} & |\tilde{\sigma}_{i,j}(t)|^2 \\ &= \frac{1}{T_i - t} \sum_{l,k=i}^{j-1} \frac{\delta_k \delta_l v_{l+1}^{i,j}(t) v_{k+1}^{i,j}(t) L(t, T_l, T_{l+1}) L(t, T_k, T_{k+1})}{|S(t, T_i, T_j)|^2} \int_t^{T_i} \gamma_l(s) \gamma_k(s) ds. \end{aligned} \quad (10.13)$$

Proof. 更详细的推导我们推荐读者参考[Sch05]。在此我们简单地把渐近的过程叙述如下：

$$\begin{aligned} dS(t, T_i, T_j) &= d \left(\frac{1}{P(t, T_i, T_j)} \sum_{k=i}^{j-1} (T_{k+1} - T_k) P(t, T_{k+1}) L(t, T_k, T_{k+1}) \right) \\ &\simeq \frac{1}{P(t, T_i, T_j)} \sum_{k=i}^{j-1} (T_{k+1} - T_k) P(t, T_{k+1}) dL(t, T_k, T_{k+1}) \\ &= \frac{1}{P(t, T_i, T_j)} \sum_{k=i}^{j-1} \delta_k P(t, T_{k+1}) L(t, T_k, T_{k+1}) \gamma_k(t) dB_t^{k+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= S(t, T_i, T_j) \sum_{k=i}^{j-1} \frac{\delta_k P(t, T_{k+1}) \gamma_k(t)}{S(t, T_i, T_j) P(t, T_i, T_j)} L(t, T_k, T_{k+1}) dB_t^{k+1} \\
 &= S(t, T_i, T_j) \sum_{k=i}^{j-1} \delta_k v_{k+1}^{i,j}(t) \gamma_k(t) \frac{L(t, T_k, T_{k+1})}{S(t, T_i, T_j)} dB_t^{k+1},
 \end{aligned}$$

hence

$$\begin{aligned}
 \sigma_{i,j}^2(t) dt &\simeq \left| \frac{dS(t, T_i, T_j)}{S(t, T_i, T_j)} \right|^2 \\
 &\simeq \frac{1}{S(t, T_i, T_j)^2} \sum_{k=i}^{j-1} \sum_{l=i}^{j-1} \delta_k \delta_l v_{k+1}^{i,j}(t) v_{l+1}^{i,j}(t) \gamma_k(t) \gamma_l(t) L(t, T_l, T_{l+1}) L(t, T_k, T_{k+1}) dt,
 \end{aligned}$$

其中，从关系式 (10.10) 可以看出， $w_k^{i,j}$ 可以通过 $\delta_k v_{k+1}^{i,j}$ 渐近得到，更多的细节请参考 [Sch05] 的第 1 章。

Black 波动率

$$\begin{aligned}
 |\sigma_{i,j}(t)|^2 & \quad (10.14) \\
 &= \frac{1}{T_i - t} \sum_{l,k=i}^{j-1} \int_t^{T_i} \frac{\delta_l \delta_k v_{l+1}^{i,j}(s) v_{k+1}^{i,j}(s) L(s, T_l, T_{l+1}) L(s, T_k, T_{k+1})}{|S(t, T_i, T_j)|^2} \gamma_l(s) \gamma_k(s) ds,
 \end{aligned}$$

$0 \leq t \leq T_i$ 可用

$$\begin{aligned}
 |\tilde{\sigma}_{i,j}(t)|^2 & \quad (10.15) \\
 &\simeq \frac{1}{T_i - t} \sum_{l,k=i}^{j-1} \frac{\delta_l \delta_k v_{l+1}^{i,j}(t) v_{k+1}^{i,j}(t) L(t, T_l, T_{l+1}) L(t, T_k, T_{k+1})}{|S(t, T_i, T_j)|^2} \int_t^{T_i} \gamma_l(s) \gamma_k(s) ds,
 \end{aligned}$$

渐近，其中要在时刻 t “冻结” 随机参数 $v_{l+1}^{i,j}(t)$, $v_{k+1}^{i,j}(t)$, $L(t, T_l, T_{l+1})$, $L(t, T_k, T_{k+1})$ 和 $S(t, T_i, T_j)$ 。□

这个渐近等于说 $S(t, T_i, T_j)$, $t \in [0, T_i]$ 是一个 $\mathbb{P}_{i,j}$ 下的指数鞅 方差函数为 $\sigma_{i,j}(t)$ 。注意到我们有 $\tilde{\sigma}_{i,i+1}(t) = \sigma_i(t)$, 因此 (10.12) 是 (10.11) 的一个推广。

§10.4 BGM模型的界定

图 10.2给出了由互换期权渐近式(10.12)反推得到的用互换期权波动率 $\sigma_{i,j}^B(t)$ 的一个市场数据实例。在此，离到期日的时间 $T_i - t$ 为纵坐标，期限结构的区间 $T_j - T_i$ 为横坐标。

Vol Swaption At The Money												
	1Y	2Y	3Y	4Y	5Y	6Y	7Y	8Y	9Y	10Y	25Y	
2D	18.6	18	16.8	15.7	14.7	13.8	13	12.3	11.8	11.3	9.3	
1M	17.6	18	16.8	15.7	14.7	13.8	13	12.3	11.8	11.3	9.3	
2M	18.1	18.35	17.05	15.95	14.95	14	13.2	12.55	12	11.5	9.45	
3M	18.6	18.7	17.3	16.2	15.2	14.2	13.4	12.8	12.2	11.7	9.6	
6M	18.7	18.1	16.8	15.7	14.8	13.9	13.3	12.7	12.2	11.8	9.7	
9M	18.3	17.5	16.3	15.25	14.4	13.6	13.05	12.55	12.1	11.75	9.7	
1Y	17.9	16.9	15.8	14.8	14	13.3	12.8	12.4	12	11.7	9.7	
2Y	16.3	15.2	14.4	13.7	13.1	12.6	12.2	11.9	11.6	11.3	9.3	
3Y	15.2	14.2	13.4	12.8	12.4	12	11.7	11.5	11.2	11	9.2	
4Y	14.4	13.2	12.6	12.1	11.7	11.5	11.2	11	10.8	10.7	8.8	
5Y	13.4	12.4	11.9	11.5	11.2	11	10.8	10.7	10.5	10.4	8.6	
6Y	12.85	11.95	11.45	11	10.75	10.55	10.4	10.25	10.1	10	8.3	
7Y	12.3	11.5	11	10.5	10.3	10.1	10	9.8	9.7	9.6	8	
8Y	11.97	11.13	10.67	10.2	10	9.8	9.7	9.53	9.43	9.33	7.83	
9Y	11.63	10.77	10.33	9.9	9.7	9.5	9.4	9.27	9.17	9.07	7.67	
10Y	11.3	10.4	10	9.6	9.4	9.2	9.1	9	8.9	8.8	7.5	
12Y	10.8	10.04	9.58	9.28	9.02	8.92	8.76	8.66	8.56	8.46	7.38	
15Y	10.2	9.5	9.1	8.8	8.6	8.5	8.4	8.3	8.2	8.1	7.2	
20Y	9.5	8.8	8.5	8.2	8	8	8	8	7.9	7.9	6.9	
25Y	8.8	8.1	7.9	7.6	7.4	7.5	7.6	7.7	7.6	7.7	6.6	
30Y	8.1	7.4	7.3	7	6.8	7	7.2	7.4	7.3	7.5	6.3	

图 10.2: 互换期权的波动率.

这种数据同样可以用如 10.3中的图形表示，其中指标 i 是指离到期日的时间 $T_i - t$ 而 j 则指期限结构的区间 $T_j - T_i$

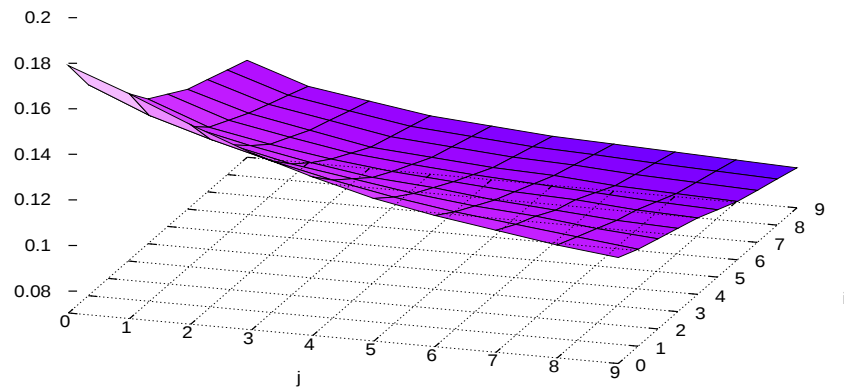


图 10.3: 市场互换期权的波动率.

界定的目标是从市场观察到的利率上限和互换期权的价格估计BGM模型(10.2)中的波动率函数

$$\gamma_i(t) \in \mathbb{R}^d, \quad 1 \leq i \leq n.$$

这个过程涉及到一些计算和稳定性的问题。设

$$g_i(t) = |\gamma_i|(t), \quad i = 1, \dots, n.$$

用 [Reb96] 参数结构

$$g_i(t) = g_\infty + (1 + a(T_i - t) - g_\infty)e^{-b(T_i - t)},$$

$a, b, g_\infty > 0, i = 1, \dots, n$, 且如(10.7)要求

$$|\sigma_i^B(t)|^2 = \frac{1}{T_i - t} \int_t^{T_i} |\gamma_i|^2(s) ds$$

可以从(10.14)得到 $\sigma_{i,j}(t)$ 的关于 b, g_∞ 函数的表达式 $\sigma_{i,j}(t, b, g_\infty)$, 其中 a 被令为等于 0. 再由 [Sch02] 我们要使得均方距离

$$\text{RMS}(b, g_\infty) := \sqrt{\frac{2}{(n-1)(n-2)} \sum_{i=1}^k \sum_{j=i+1}^n \left(\frac{\sigma_{i,j}^B(t) - \sigma_{i,j}(t)}{\sigma_{i,j}^B(t)} \right)^2}$$

最小, 其中 n 是期限结构中期限日期 (以年为单位) 的数目, 且 k 是在界定中用到的互换期权的最大数目, 当某个期限日期没有对应的数据时则该求和项中为零。折扣银子和互换率的数据通过用 $\delta = \text{半年的定值}$ 通过差值补齐数据。

通过这种方法计算得到的波动率在下面的图形中给出, 其中指标 i 表示 $T_i - t$ 且 j 表示 $T_j - T_i$:

这样我们可通过图 10.5 来比较估计的和计算的波动率。

同时估计参数 (b, g_∞) 的一个实例在图 10.6 的表格中给出, 其中在界定中用到的各到期日的互换期权的最大数目 k 记为 N_{mat} , 详见 [PW09]。所用的互换期权的最大数目不超过 $nk - k(k+1)/2$ 。

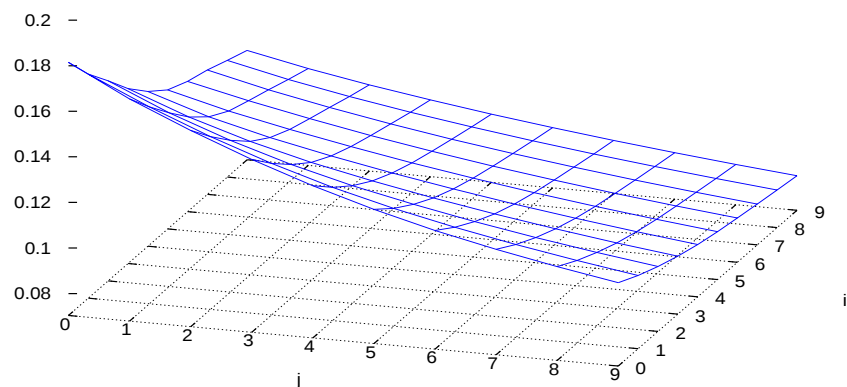


图 10.4: 计算出的互换波动率.

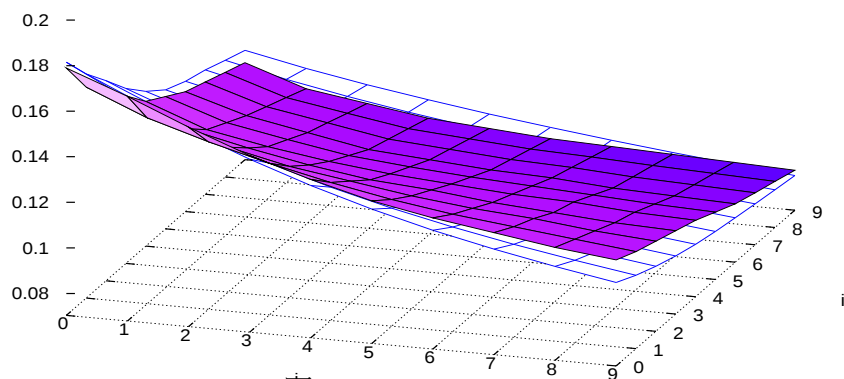


图 10.5: 图形的比较.

§10.5 练习

练习 10.1. (练习 9.1 续). 计算敲定价格为 κ 的关于 $S(t, T_1, T_3)$ 的互换期权在时刻 t 的价格:

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[e^{-\int_t^{T_1} r_s ds} P(T_1, T_1, T_3) (S(T_1, T_1, T_3) - \kappa)^+ \mid \mathcal{F}_t \right] \\ &= P(t, T_1, T_3) \mathbb{E}_{1,3} [(S(T_1, T_1, T_3) - \kappa)^+ \mid \mathcal{F}_t], \end{aligned}$$

其中 $\mathbb{E}_{1,3}$ 表示在定义为

$$\frac{d\mathbb{P}_{1,3}}{d\mathbb{P}} = e^{-\int_0^{T_1} r_s ds} \frac{P(T_1, T_1, T_3)}{P(0, T_1, T_3)}$$

Nmat	#swaptions	b	g_∞	RMS
1	10	5.03	0.85	0.008
2	20	5.03	0.71	0.010
3	30	5.04	0.73	0.010
4	40	5.03	0.72	0.010
5	50	5.04	0.70	0.011
6	60	5.03	0.65	0.011
7	70	5.02	0.60	0.012
8	80	5.02	0.60	0.012
9	90	5.02	0.72	0.013
10	100	5.04	0.63	0.012
12	110	5.03	0.65	0.012
15	120	5.03	1.00	0.014

图 10.6: 数值结果。

的远期互换测度 $\mathbb{P}_{1,3}$ 下的期望。为此需要 $\sigma_{1,3}(s)$ 的渐近，而这可通过在时刻 t “冻结”在 $\sigma_{1,3}(s)$, $s \geq t$ 出现的所有随机项。

练习 10.2. (练习 9.3 续).

1. 推导 $P(t, T_1)$ 所满足的随机微分方程，并由题中的数据确定过程 $\zeta_1(t)$ 。
2. 证明 $L(t, T_1, T_2)$ 满足随机微分方程

$$\frac{dL(t, T_1, T_2)}{L(t, T_1, T_2)} = \gamma dB_t - \gamma \zeta_2(t) dt, \quad 0 \leq t \leq T_1, \quad (10.16)$$

3. 假设 $r_t = r > 0$ 是一个确定的常数且 $\zeta_1(t) = 0$, $t \in \mathbb{R}_+$. 计算债券期权价格表示为关于 $L(t, T_1, T_2)$ 的函数的渐近式

$$P(t, T_1) \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[(P(T_1, T_2) - K)^+ \mid \mathcal{F}_t \right].$$

为了推导渐近价格，可以在 $\mathbb{P}$ 下“冻结” $L(s, T_1, T_2)$ 的漂移项，即可以假设 (10.16) 可些微

$$\frac{dL(s, T_1, T_2)}{L(s, T_1, T_2)} = \gamma dB_s - \gamma \zeta_2(t) ds, \quad t \leq s \leq T_1.$$

最后的结果可以表达为 $\mathbb{R}$ 上的积分，而不需要写出它的显式表达式。

第十一章 附录A:数学工具

本附录涉及在本书中所用到的一些概率和测度论中的基本结果，但并不是一个完整的体系，读者可参考概率论的标准教材，如[JP00], [Pro05]以获得更多的细节。

今后我们将在概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 讨论，并记 $\mathbb{E}$ 为 $\mathbb{P}$ 下的期望。

可测性

对于给定的随机变量列 $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ，称随机变量 F 是 $\mathcal{F}_n$ -可测的，若它可以写成 $Y_0, \dots, Y_n$ 的函数

$$F = f_n(Y_0, \dots, Y_n),$$

其中 $f_n : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$. 在此定义由 $(Y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ 产生的自然信息流 $(\mathcal{F}_n)_{n \geq -1}$ 为

$$\mathcal{F}_n = \sigma(Y_0, \dots, Y_n), \quad n \geq 0,$$

并且 $\mathcal{F}_{-1} = \{\emptyset, \Omega\}$, 其中 $\sigma(Y_0, \dots, Y_n)$ 是使得 $Y_0, \dots, Y_n$ 可测的最小 σ -代数.

随机变量 X 被称为是 可积的, 若 $\mathbb{E}[|X|] < \infty$.

协方差和相关性

连个随机变量 X 和 Y 的协方差被定义为

$$\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])],$$

且有

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X, X) &= \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] \\ &= \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 \\ &= \text{Var}(X). \end{aligned}$$

进一步对于所有 $\alpha \in \mathbb{R}$ 方差满足关系式

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(\alpha X) &= \mathbb{E}[(\alpha X - \mathbb{E}[\alpha X])^2] \\ &= \mathbb{E}[(\alpha X - \alpha \mathbb{E}[X])^2] \\ &= \mathbb{E}[\alpha(X - \mathbb{E}[X])^2] \\ &= \alpha^2 \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] \\ &= \alpha^2 \mathrm{Var}(X).\end{aligned}$$

X 和 Y 的相关系数是参数

$$c(X, Y) := \frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)}\sqrt{\mathrm{Var}(Y)}}.$$

显然当 X 与 Y 独立时, 有 $c(X, Y) = 0$, 且当 $X = Y$ 时, 有 $c(X, Y) = 1$ 。类似地, 也可以定义在给定的 σ -代数 $\mathcal{G}$ 下的条件方差和协方差为

$$\mathrm{Cov}(X, Y|\mathcal{G}) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X|\mathcal{G}])(Y - \mathbb{E}[Y|\mathcal{G}]|\mathcal{G}),$$

和

$$\mathrm{Var}(X|\mathcal{G}) = \mathrm{Cov}(X, X|\mathcal{G}) = \mathbb{E}[X^2|\mathcal{G}] - (\mathbb{E}[X|\mathcal{G}])^2.$$

注意到若 Y 是平方可积的且 $\mathcal{G}$ -可测的, 则有关系式

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X + Y|\mathcal{G}) &= \mathbb{E}[(X + Y - \mathbb{E}[X + Y|\mathcal{G}])^2|\mathcal{G}] \\ &= \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X|\mathcal{G}])^2|\mathcal{G}] \\ &= \mathrm{Var}(X|\mathcal{G}).\end{aligned}$$

可测随机变量 X 被称为是中心化的, 若 $\mathbb{E}[X] = 0$ 。

高斯随机变量

一个随机变量 X 被称为, 均值为 μ 且方差为 σ^2 , 若它的特征函数满足

$$\mathbb{E}[e^{i\alpha X}] = e^{i\alpha\mu - \alpha^2\sigma^2/2}, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

即用Laplace变化表示为

$$\mathbb{E}[e^{\alpha X}] = e^{\alpha\mu + \alpha^2\sigma^2/2}, \quad \alpha \in \mathbb{R}. \quad (11.1)$$

由[JP00]的推论 16.1, 我们得到下面的结果.

命题 11.1. 设 $X_1, \dots, X_n$ 是一族相互独立的中心高斯随机变量, 即

$$\mathbb{E}[X_i X_j] = 0, \quad 1 \leq i \neq j \leq n.$$

则随机变量 $X_1, \dots, X_n$ 是独立的。

一对随机变量 (X, Y) 是高斯 均值为 μ 协方差矩阵为 Σ , 若其Laplace变化满足

$$\mathbb{E}[e^{i\langle X, u \rangle_{\mathbb{R}^2}}] = e^{i\langle \mu, u \rangle_{\mathbb{R}^2} - \frac{1}{2}\langle \Sigma u, u \rangle_{\mathbb{R}^2}}, \quad u \in \mathbb{R}^2. \quad (11.2)$$

最后, 若 $X_1, \dots, X_n$ 是相互独立的高斯随机变量且概率分布为 $\mathcal{N}(m_1, \sigma_1^2), \dots, \mathcal{N}(m_n, \sigma_n^2)$ 则其和 $X_1 + \dots + X_n$ 是高斯随机变量概率分布为

$$\mathcal{N}(m_1 + \dots + m_n, \sigma_1^2 + \dots + \sigma_n^2).$$

条件期望

考虑 $\mathcal{F}$ 的子 σ -代数 $\mathcal{G}$ 。在给定 $\mathcal{G}$ 下 $F \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 的条件期望 $\mathbb{E}[F | \mathcal{G}]$ 可以定义为 F 在 $L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ 到乘积 $\langle F, G \rangle := \mathbb{E}[FG]$ 上的一个正交映射。也就是说 $\mathbb{E}[F | \mathcal{G}]$ 是对于所有有界且 $\mathcal{G}$ -可测的 G 满足

$$\mathbb{E}[G(F - \mathbb{E}[F | \mathcal{G}])] = 0,$$

或者

$$\mathbb{E}[GF] = \mathbb{E}[G \mathbb{E}[F | \mathcal{G}]], \quad (11.3)$$

的唯一 $\mathcal{G}$ -可测的随机变量。

条件期望满足以下性质

a) $\mathbb{E}[F | \mathcal{G}] = \mathbb{E}[F]$ 若 F 与 $\mathcal{G}$ 独立.

b) $\mathbb{E}[\mathbb{E}[F | \mathcal{F}] | \mathcal{G}] = \mathbb{E}[F | \mathcal{G}]$ 若 $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$.

c) $\mathbb{E}[GF | \mathcal{G}] = G \mathbb{E}[F | \mathcal{G}]$ 若 G 是 $\mathcal{G}$ -可测且充分可积的。

d) 若 X 与 Y 独立且 Y 是 $\mathcal{F}$ -可测的, 若

$$\mathbb{E}[f(X, Y) | \mathcal{F}] = \mathbb{E}[f(X, y)]_{y=Y}. \quad (11.4)$$

离散时间鞅

考虑 $\mathcal{F}$ 的一族单调增的子 σ -代数 $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$, 关于 $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 的离散时间 L^2 -鞅是一族随机变量 $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 满足

i) $M_n \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_n, \mathbb{P})$, $n \in \mathbb{N}$,

ii) $\mathbb{E}[M_{n+1} | \mathcal{F}_n] = M_n$, $n \in \mathbb{N}$.

例如, 过程

$$(Y_0 + \cdots + Y_n)_{n \geq 0}$$

的增量序列 $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 满足

$$\mathbb{E}[Y_n | \mathcal{F}_{n-1}] = 0, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (11.5)$$

是一个关于它自己的信息流

$$\mathcal{F}_{-1} = \{\emptyset, \Omega\}$$

和

$$\mathcal{F}_n = \sigma(Y_0, \dots, Y_n), \quad n \geq 0$$

的鞅。

特别地, 当增量 $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 是独立中心化随机变量时条件 (11.5) 得到满足。

连续时间鞅

设 $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ 为连续时间信息流，即 $\mathcal{F}$ 的一个单调增的子 σ -代数族。假设 $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ 是右连续的，即

$$\mathcal{F}_t = \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

随机过程就是一族以时间点为指标的随机变量。

定义 11.1. 满足 $\mathbb{E}[|M_t|] < \infty$, $t \in \mathbb{R}_+$ 的随机过程 $(M_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ 被称为 $\mathcal{F}_t$ -鞅若

$$\mathbb{E}[M_t | \mathcal{F}_s] = M_s, \quad 0 \leq s < t.$$

过程 $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ 被称为增量独立的，若对于 $0 \leq s < t$ $X_t - X_s$ 与 $\sigma(X_u : 0 \leq u \leq s)$ 独立。

命题 11.2. 每一个有中心独立增量的可积过程 $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ 都是一个关于由

$$\mathcal{F}_t := \sigma(X_u : u \leq t), \quad t \in \mathbb{R}_+$$

产生的信息流的鞅，也就是关于其自然对数流的鞅。

注意到对于所有的平方可积的随机变量 F 过程 $(\mathbb{E}[F | \mathcal{F}_t])_{t \in \mathbb{R}_+}$ ，由于

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[F | \mathcal{F}_t] | \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[F | \mathcal{F}_s], \quad 0 \leq s \leq t,$$

则由条件期望的性质 (b) 可知，它是一个鞅。

马氏过程

设 $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^n)$ 表示一类在无穷时趋于0 的连续函数。我们知道 f 在无穷时趋于0 如果对于所有的 $\varepsilon > 0$ ，存在 $\mathbb{R}^n$ 的一个紧子集 K 使得对于所有的 $x \in \mathbb{R}^n \setminus K$ 有 $|f(x)| \leq \varepsilon$ 。

定义 11.2. 一个 $\mathbb{R}^n$ -值随机过程，即一族 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上的随机变量 $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ 是一个马氏过程 如果对于所有的 $t \in \mathbb{R}_+$ ， σ -域

$$\mathcal{F}_t^+ := \sigma(X_s : s \geq t)$$

且

$$\mathcal{F}_t := \sigma(X_s : 0 \leq s \leq t)$$

在给定 X_t 时是条件独立的。

这一条件可以重新描述为对于所有的 $A \in \mathcal{F}_t^+$ 和 $B \in \mathcal{F}_t$ 有

$$\mathbb{P}(A \cap B \mid X_t) = \mathbb{P}(A \mid X_t)\mathbb{P}(B \mid X_t),$$

参见 Chung [Chu02]. 这一定义很自然要求:

- i) $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ 是关于 $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ 适应的, 即 X_t 是 $\mathcal{F}_t$ -可测的, $t \in \mathbb{R}_+$, 且
- ii) X_u 是在给定 X_t , $u \geq t$ 下, 与 $\mathcal{F}_t$ 条件独立的, 即对于 $\mathbb{R}^n$ 上的所有有界可测函数 f ,

$$\mathbb{E}[f(X_u) \mid \mathcal{F}_t] = \mathbb{E}[f(X_u) \mid X_t], \quad 0 \leq t \leq u.$$

特别地,

$$\mathbb{P}(X_u \in A \mid \mathcal{F}_t) = \mathbb{E}[\mathbf{1}_A(X_u) \mid \mathcal{F}_t] = \mathbb{E}[\mathbf{1}_A(X_u) \mid X_t] = \mathbb{P}(X_u \in A \mid X_t),$$

$A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

独立增量过程是马氏过程的一个简单的例子。实际上, 对于所有的有界可测函数 f 和 g 有

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}[f(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})g(X_{s_1}, \dots, X_{s_n}) \mid X_t] \\ &= \mathbb{E}[f(X_{t_1} - X_t + x, \dots, X_{t_n} - X_t + x) \\ & \quad g(X_{s_1} - X_t + x, \dots, X_{s_n} - X_t + x)]_{x=X_t} \\ &= \mathbb{E}[f(X_{t_1} - X_t + x, \dots, X_{t_n} - X_t + x)]_{x=X_t} \\ & \quad \mathbb{E}[g(X_{s_1} - X_t + x, \dots, X_{s_n} - X_t + x)]_{x=X_t} \\ &= \mathbb{E}[f(X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) \mid X_t] \mathbb{E}[g(X_{s_1}, \dots, X_{s_n}) \mid X_t], \end{aligned}$$

$0 \leq s_1 < \dots < s_n < t < t_1 < \dots < t_n$. 转移核是满足下列条件的映射 $\mathbb{P}(x, dy)$

i) 对于每一 $x \in E$, $A \mapsto \mathbb{P}(x, A)$ 是一个概率测度, 且

ii) 对于每一 $A \in \mathcal{B}(E)$, 映射 $x \mapsto \mathbb{P}(x, A)$ 是一个可测函数。

$(X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ 的转移核 $\mu_{s,t}$ 定义为

$$\mu_{s,t}(x, A) = \mathbb{P}(X_t \in A \mid X_s = x) \quad 0 \leq s \leq t,$$

且有

$$\mu_{s,t}(X_s, A) = \mathbb{P}(X_t \in A \mid X_s) = \mathbb{P}(X_t \in A \mid \mathcal{F}_s), \quad 0 \leq s \leq t.$$

$(X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ 的转移算子 $(P_{s,t})_{0 \leq s \leq t}$ 定义为

$$P_{s,t}f(x) = \mathbb{E}[f(X_t) \mid X_s = x] = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \mu_{s,t}(x, dy), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

设 $p_{s,t}(x)$ 表示 $X_t - X_s$ 的密度, 我们有

$$\mu_{s,t}(x, A) = \int_A p_{s,t}(y - x) dy, \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n),$$

且

$$P_{s,t}f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) p_{s,t}(y - x) dy.$$

今后我们将假设 $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ 是时齐的, 即 $\mu_{s,t}$ 仅依赖于差 $t-s$, 并且记为 μ_{t-s} .

这样 $(P_{0,t})_{t \in \mathbb{R}_+}$ 就记为 $(P_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$, 并定义 $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ 的转移半群为

$$P_t f(x) = \mathbb{E}[f(X_t) \mid X_0 = x] = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \mu_t(x, dy), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

他满足半群的性质

$$\begin{aligned} P_t P_s f(x) &= \mathbb{E}[P_s f(X_t) \mid X_0 = x] \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[f(X_{t+s}) \mid X_s] \mid X_0 = x] \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[f(X_{t+s}) \mid \mathcal{F}_s] \mid X_0 = x] \\ &= \mathbb{E}[f(X_{t+s}) \mid X_0 = x] \end{aligned}$$

$$= P_{t+s}f(x),$$

这就导出了Chapman-Kolmogorov方程

$$\mu_{s+t}(x, A) = \mu_s * \mu_t(x, A) = \int_{\mathbb{R}^n} \mu_s(x, dy) \mu_t(y, A). \quad (11.6)$$

由数学归纳法我们得到

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}_x((X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) \in B_1 \times \dots \times B_n) \\ &= \int_{B_1} \dots \int_{B_n} \mu_{0,t_1}(x, dx_1) \dots \mu_{t_{n-1}, t_n}(x_{n-1}, dx_n), \end{aligned}$$

对于 $\mathbb{R}^n$ 的Borel子集 $0 < t_1 < \dots < t_n$ 和 $B_1, \dots, B_n$ 。

若 $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ 是一个时齐的马氏过程且增量独立则 X_t 的密度 $p_t(x)$ 满足卷积性质

$$p_{s+t}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} p_s(y-x) p_t(y) dy, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

特别地如Lévy过程的平稳独立增量过程都满足这一性质。一个密度函数满足卷积性质的典型的例子是高斯密度，即

$$p_t(x) = \frac{1}{(2\pi t)^{n/2}} \exp\left(-\frac{1}{2t} \|x\|_{\mathbb{R}^n}^2\right), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

第十二章 附录B: 相关进展

在此附录中我们列举出近来在相关文献中关注的一些问题。

无穷维分析

对长期利率进行现代数学建模在很大程度上依赖于如无限维李代数和卷积等的无限维泛函分析工具，这与标准的资产模型相比就增加了更大的难度。实际上，远期利率 $F(t, T, S)$ 可被看做是一个取值于双变量或者多变量的函数空间上的过程 $t \mapsto F(t, \cdot, \cdot)$ ，因此关于它的建模就必然要用到取值于（无限维）函数空间上的随机过程。这种建模方法在近年来有了蓬勃的发展，参见

[Bjö04], [DDP05], [ET05], [FT04], [Pra08], [DP04]. 例如，在6章中考虑的HJM模型可以写为Banach空间的随机驱动的方程，见[CT06]及其参考文献。在文献中考虑的相关问题包括了以下几个方面，见[Bjö04]及其参考文献：

- a) 卷积不变性: 确定包含初始条件 $r_0(\cdot)$ 的函数空间，其中远期利率过程随着时间的演变仍属于其中。
- b) 有限维轨道: 找出 $f_t(\cdot)$ 属于利率曲线的有限维卷积的条件。
- c) 一致性: 找出 $f_t(\cdot)$ 属于已有的远期利率曲线模型的函数空间，如Nelson–Siegel空间的条件。
- d) 对冲与到期日相关的风险[CT06].

上述第(c)点的答案是否定的，见[Bjö04]的§3.5。实际上由关系式 (6.3) 我们已经知道Vasicek 瞬时远期利率 $x \mapsto f(t, t+x)$ 是在一个既不同于Nelson–Siegel空间也不用于Svensson空间的函数空间上的。

推广利率模型

Vasicek和CIR随机短期利率模型属于所谓的仿射模型族，这个族在很多方面都有推广。例如，通过取值于矩阵的扩散过程构造二次模型，参见 [GS03]及其相关参考文献。通过李群上的随机微分方程可得到一些保持利率的正值性的模型，参见[JW01]的§ 16.4。近年来LIBOR市场模型也被推广到包括随机波动率的情形，参见[ABR05], [Pit04]和[WZ06]。[GK03]和[EÖ05]分别提出了点过程的带跳利率模型和Lévy过程表示的带跳利率模型。

关于利率的奇异的和路径依赖的期权

这些类型的期权越来越受欢迎。让我们来举两个例子。

目标兑现票据 (TARN). 这种期权的支付取决于当所积累的红利

$$\int_0^t (\kappa - F(s, T))^+ ds$$

达到一定水平的时刻，这使得它取决于远期点率 $F(s, T)$ 的整个路径。这种类型的期权已经在亚洲市场大受欢迎，并在今后会有更大的发展。

区间积累票据 (RAN). 这个类型的期权，增加了当参考指标落在事前定好的区间 $[m, M]$ 时所累加的利率，其所导致的损益形式为

$$\frac{1}{S - T} \int_T^S \mathbf{1}_{\{F(t, T) \in [m, M]\}} dt$$

其他的奇异期权还有雪球期权和波动率债券等。

敏感性分析和Malliavin计算

在数理金融中一个实际问题是价格函数及其关于模型参数的导数（也称为敏感性）的快速数值计算。敏感性的计算在金融交易的对冲和风险管

理是很有用的，其计算的速度尤为最关键。资产期权价格 对于如初始价格，利率，波动率参数等的敏感性计算的快速数值方法可以通过随机变差计算（或者Malliavin计算）得到，如通过以下形式的计算

$$\frac{\partial}{\partial x} E[\phi(S_T) | S_0 = x] = E[\phi(S_T) \Lambda_T | S_0 = x], \quad (12.1)$$

其中 Λ_T 是一个通过在 u 的方向上的随机梯度算子 D 和它的对偶 δ 计算出来的随机权重算子，参见 [FLL+99]。变差的随机计算是一个灵活的工具，它不仅在线性路径空间 得到发展而且在能用于Riemannian路径空间，包括无限维情形，参见 [Mal97], [MT06]。在 [DFM09]变差的随机计算被用于推导形如(12.1)的远期利率期权的敏感性计算公式。

长寿和死亡率风险

最近，始于[MP01]，由利率模型导出的随机模型被提出用于模拟长寿和死亡率风险，这一方法可用于构造和定价寿险债券和死亡率衍生品，HJM框架在这一领域找到新的应用。

第十三章 练习的答案

第1章

练习 1.1. 我们只需验证布朗运动的五个性质:

- (i) 在0时刻开始于 0,
- (ii) 独立增量,
- (iii) 几乎处处连续的轨道,
- (iv) 平稳增量,
- (v) 高斯型的增量。

从(i) 到 (iv)的验证没有什么特别困难, 因为时间映射 $t \mapsto c + t$ 和 $t \mapsto t/c^2$ 是确定且连续的。而至于(v), $B_{c+t} - B_c$ 显然有一个方差为 t 的中心高斯分布, 且由于

$$\text{Var}(cB_{t/c^2}) = c^2 \text{Var}(B_{t/c^2}) = c^2 t / c^2 = t$$

cB_{t/c^2} 也具有同样的性质。

练习 1.2. 我们有 $S_t = S_0 e^{\sigma B_t - \sigma^2 t / 2 + \mu t}$ 。

练习 1.3. 求出满足

$$X_t = e^{-\alpha t} x_0 + \sigma \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} dB_s, \quad t \in \mathbb{R}_+$$

形如

$$X_t = a(t) \left(x_0 + \int_0^t b(s) dB_s \right)$$

的解。

练习 1.4. 由给出的等式, 我们有 $a'(t)/a(t) = t$ 和 $a(t)b(t) = e^{t^2/2}$, 因此可得 $a(t) = e^{t^2/2}$ 和 $b(t) = 1$, 这就有 $X_t = e^{t^2/2}(x_0 + B_t)$, $t \in \mathbb{R}_+$ 。

练习 1.5. 设 $X_t = \sqrt{Y_t}$ 我们有 $dX_t = \mu X_t dt + \sigma dB_t$, 因此

$$Y_t = \left(e^{\mu t} \sqrt{y_0} + \sigma \int_0^t e^{\mu(t-s)} dB_s \right)^2.$$

练习 1.6. 设 $f \in L^2([0, T])$ 。我们有

$$E \left[e^{\int_0^T f(s) dB_s} \mid \mathcal{F}_t \right] = \exp \left(\int_0^t f(s) dB_s + \frac{1}{2} \int_t^T |f(s)|^2 ds \right), \quad 0 \leq t \leq T.$$

练习 1.7.

我们有

$$\begin{aligned} E \left[\exp \left(\beta \int_0^T B_t dB_t \right) \right] &= E \left[\exp \left(\beta (B_T^2 - T)/2 \right) \right] \\ &= e^{-\beta T/2} E \left[\exp \left(\beta B_T^2/2 \right) \right] \\ &= \frac{e^{-\beta T/2}}{\sqrt{2\pi T}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(\beta - \frac{1}{T}) \frac{x^2}{2}} dx \\ &= \frac{e^{-\beta T/2}}{\sqrt{1 - \beta T}}. \end{aligned}$$

对于所有的 $\beta < 1/T$.

练习 1.8.

1. 我们有

$$d(X_t^T/(T-t)) = \frac{dX_t^T}{T-t} + \frac{X_t^T}{(T-t)^2} dt = \sigma \frac{dB_t}{T-t},$$

因此利用初始条件 $X_0 = 0$ 由积分可得

$$\frac{X_t^T}{T-t} = \sigma \int_0^t \frac{1}{T-s} dB_s, \quad t \in [0, T].$$

2. 我们有

$$\mathbb{E}[X_t^T] = \sigma(T-t) \mathbb{E} \left[\int_0^t \frac{1}{T-s} dB_s \right] = 0.$$

3. 利用伊藤公式我们有

$$\begin{aligned} \text{Var}[X_t^T] &= \sigma^2(T-t)^2 \text{Var} \left[\int_0^t \frac{1}{T-s} dB_s \right] \\ &= \sigma^2(T-t)^2 \int_0^t \frac{1}{(T-s)^2} ds \\ &= \sigma^2(T-t)^2 \left(\frac{1}{T-t} - \frac{1}{T} \right) \\ &= \sigma^2(1-t/T). \end{aligned}$$

4. 我们有 $\text{Var}[X_T^T] = 0$ 因此由问题 2 有 $X_T^T = \mathbb{E}[X_T^T] = 0$ 。

第2章

练习 2.1.

1. 我们有

$$X_t^\alpha = e^{\alpha t} X_0^\alpha + \int_0^t e^{\alpha(t-s)} dB_s,$$

且由Girsanov 定理可得

$$\frac{dQ}{dP} = \exp \left(-\alpha \int_0^T X_t^{(\alpha)} dB_t - \frac{\alpha^2}{2} \int_0^T (X_t^{(\alpha)})^2 dt \right).$$

2. 对于所有的 $\beta < 1/T$ 我们有

$$\begin{aligned} &E \left[\exp \left((\beta - \alpha) \int_0^T X_t^{(\alpha)} dX_t^{(\alpha)} + \frac{\alpha^2}{2} \int_0^T (X_t^{(\alpha)})^2 dt \right) \right] \\ &= E \left[\exp \left(\beta \int_0^T X_t^{(\alpha)} dX_t^{(\alpha)} - \alpha \int_0^T X_t^{(\alpha)} dB_t \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \alpha^2 \int_0^T (X_t^{(\alpha)})^2 dt + \frac{\alpha^2}{2} \int_0^T (X_t^{(\alpha)})^2 dt \right) \right] \\ &= E \left[\exp \left(\beta \int_0^T X_t^{(\alpha)} dX_t^{(\alpha)} - \alpha \int_0^T X_t^{(\alpha)} dB_t - \frac{\alpha^2}{2} \int_0^T (X_t^{(\alpha)})^2 dt \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= E_Q \left[\exp \left(\beta \int_0^T X_t^{(\alpha)} dX_t^{(\alpha)} \right) \right] \\
 &= E \left[\exp \left(\beta \int_0^T B_t dB_t \right) \right] \\
 &= \frac{e^{-\beta T/2}}{\sqrt{1 - \beta T}}.
 \end{aligned}$$

3. 令 $\beta = \alpha$ 可得

$$E \left[\exp \left(\frac{\alpha^2}{2} \int_0^T (X_t^{(\alpha)})^2 dt \right) \right] = \frac{e^{-\alpha T/2}}{\sqrt{1 - \alpha T}},$$

对于所有的 $\alpha < 1/T$.

练习 2.2.

1. 由Girsanov 定理, 概率 $\mathbb{Q}$ 由其密度

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = \exp \left(-\frac{\mu - r}{\sigma} B_T - \frac{(\mu - r)^2 T}{2\sigma^2} \right)$$

给出。

2. 对于所有的 $t \in [0, T]$ 我们有

$$\begin{aligned}
 C(t, S_t) &= e^{-r(T-t)} S_t^2 \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\frac{S_T^2}{S_t^2} \mid \mathcal{F}_t \right] \\
 &= e^{-r(T-t)} S_t^2 \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[e^{2\sigma(\tilde{B}_T - \tilde{B}_t) - \sigma^2(T-t) + 2r(T-t)} \mid \mathcal{F}_t \right] \\
 &= S_t^2 e^{(r+\sigma^2)(T-t)},
 \end{aligned}$$

其中 $\tilde{B}_t = B_t + (\mu - r)t/\sigma$, $t \in [0, T]$ 是一个在 $\mathbb{Q}$ 下的标准布朗运动。

3. 对于所有的 $t \in [0, T]$ 我们有

$$\zeta_t = \frac{\partial C}{\partial x}(t, x)|_{x=S_t} = 2S_t e^{(r+\sigma^2)(T-t)},$$

且

$$\begin{aligned}
 \eta_t = \frac{C(t, S_t) - \zeta_t S_t}{A_t} &= \frac{e^{-rt}}{A_0} (S_t^2 e^{(r+\sigma^2)(T-t)} - 2S_t^2 e^{(r+\sigma^2)(T-t)}) \\
 &= -\frac{S_t^2}{A_0} e^{\sigma^2(T-t) + r(T-2t)}.
 \end{aligned}$$

4. 对于所有的 $t \in [0, T_0]$ 我们有:

$$\begin{aligned}
 C(t) &= e^{-r(T-t)} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\frac{S_T}{S_{T_0}} \mid \mathcal{F}_t \right] \\
 &= e^{-r(T-t)} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\frac{S_T}{S_{T_0}} \right] \\
 &= e^{-r(T-t)} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[e^{\sigma(\tilde{B}_T - \tilde{B}_{T_0}) - \sigma^2(T-T_0)/2 + r(T-T_0)} \right] \\
 &= e^{-r(T-t) + r(T-T_0)} \\
 &= e^{-r(T_0-t)},
 \end{aligned}$$

且对于 $t \in]T_0, T]$:

$$\begin{aligned}
 C(t) &= e^{-r(T-t)} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\frac{S_T}{S_{T_0}} \mid \mathcal{F}_t \right] \\
 &= e^{-r(T-t)} \frac{S_t}{S_{T_0}} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\frac{S_T}{S_t} \mid \mathcal{F}_t \right] \\
 &= e^{-r(T-t)} \frac{S_t}{S_{T_0}} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\frac{S_T}{S_t} \right] \\
 &= e^{-r(T-t)} \frac{S_t}{S_{T_0}} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[e^{\sigma(\tilde{B}_T - \tilde{B}_t) - \sigma^2(T-t)/2 + r(T-t)} \right] \\
 &= \frac{S_t}{S_{T_0}}.
 \end{aligned}$$

5. 对于所有的 $t \in [0, T_0]$ 我们有 $\zeta_t = 0$ 和 $\eta_t = e^{-rT_0}/A_0$, 并且对于 $t \in]T_0, T]$ 我们有 $\eta_t = 0$ 且 $\zeta_t = 1/S_{T_0}$. 我们有 $d\zeta_t = d\eta_t = 0$ 对于 $t \in [0, T_0]$ 和 $t \in]T_0, T]$, 因此它是在此时间区间内的自融资投资组合。另一方面当 $t = T_0$ 我们同样有 $S_{T_0}d\zeta_{T_0} + A_{T_0}d\eta_{T_0} = S_{T_0} \times 1/S_{T_0} - A_{T_0}e^{-rT_0}/A_0 = 0$.

练习 2.3.

1. 我们有

$$S_t = S_0 e^{\alpha t} + \sigma \int_0^t e^{\alpha(t-s)} dB_s.$$

2. 我们有 $\alpha_M = r$.

3. 在计算了条件期望

$$C(t, x) = e^{-r(T-t)} \exp \left(x e^{r(T-t)} + \frac{\sigma^2}{4r} (e^{2r(T-t)} - 1) \right)$$

之后。

4. 在此我们注意到一般的 Black-Scholes 讨论在此适用且可得到 $\zeta_t = \partial C(t, S_t) / \partial x$, 也就是

$$\zeta_t = \exp \left(S_t e^{r(T-t)} + \frac{\sigma^2}{4r} (e^{2r(T-t)} - 1) \right).$$

第3章

练习 3.1.

1. 我们有 $Y_t = e^{-at} y_0 + \frac{\theta}{a} (1 - e^{-at}) + \sigma \int_0^t e^{-a(t-s)} dB_s$.

2. 我们有 $dX_t = X_t \left(\theta + \frac{\sigma^2}{2} - a \log X_t \right) dt + \sigma X_t dB_t$.

3. 我们有 $r_t = \exp \left(e^{-at} \log r_0 + \frac{\theta}{a} (1 - e^{-at}) + \sigma \int_0^t e^{-a(t-s)} dB_s \right)$, 其中 $\eta = \theta + \sigma^2/2$.

4. 我们有

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[r_t | \mathcal{F}_u] \\ = \exp \left(e^{-a(t-u)} \log r_u + \frac{\theta}{a} (1 - e^{-a(t-u)}) + \frac{\sigma^2}{4a} (1 - e^{-2a(t-u)}) \right) \end{aligned}$$

由(11.1), 附录 A中的条件期望的性质 (b)和命题 1.3。

5. 我们有

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[r_t^2 | \mathcal{F}_u] \\ = \exp \left(2e^{-a(t-u)} \log r_u + 2\frac{\theta}{a} (1 - e^{-a(t-u)}) + \frac{\sigma^2}{a} (1 - e^{-2a(t-u)}) \right) \end{aligned}$$

且 $\text{Var}[r_t | \mathcal{F}_u]$ 可通过上述两个表达式和等式 $\text{Var}[r_t | \mathcal{F}_u] = \mathbb{E}[r_t^2 | \mathcal{F}_u] - (\mathbb{E}[r_t | \mathcal{F}_u])^2$ 计算。

6. 我们有 $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}[r_t] = \exp\left(\frac{\theta}{a} + \frac{\sigma^2}{4a}\right)$ 和

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{Var}[r_t] = \exp\left(\frac{2\theta}{a} + \frac{\sigma^2}{a}\right) - \exp\left(\frac{2\theta}{a} + \frac{\sigma^2}{2a}\right).$$

练习 3.2.

1. 我们有 $r_t = r_0 + \int_0^t (\alpha - \beta r_s) ds + \sigma \int_0^t \sqrt{r_s} dB_s$.

2. 利用关于布朗运动的随机积分期望值为零的事实，通过对上一积分方程等号两边同时取期望得到：

$$u'(t) = \alpha - \beta u(t).$$

3. 对于

$$r_t^2 = f\left(r_0 + \int_0^t (\alpha - \beta r_s) ds + \sigma \int_0^t \sqrt{r_s} dB_s\right),$$

应用伊藤公式 其中 $f(x) = x^2$ ，可得 $d(r_t)^2 = r_t(\sigma^2 + 2\alpha - 2\beta r_t)dt + 2r_t\sigma\sqrt{r_t}dB_t$.

4. 再次对上一个方程等号两边同时取期望得到

$$v'_t = (2\alpha + \sigma^2)u(t) - 2\beta v(t),$$

这意味着

$$v'_t = \frac{\alpha}{\beta}(2\alpha + \sigma^2) + (2\alpha + \sigma^2)\left(r_s - \frac{\alpha}{\beta}\right)e^{-\beta(t-s)} - 2\beta v(t).$$

该方程的解可写为齐次方程 $v'(t) = -2\beta v(t)$ 的解 $v(t) = ce^{-2\beta t}$ 与原始方程的特解 $p(t)$ 之和 $v(t) = v(t) + p(t)$ 。找形如 $p(t) = \zeta + \xi e^{-\beta(t-s)}$ 的方程的特解得到

$$p(t) = \frac{\alpha(2\alpha + \sigma^2)}{2\beta^2} + \frac{2\alpha + \sigma^2}{\beta}\left(r_s - \frac{\alpha}{\beta}\right)e^{-\beta(t-s)},$$

因此

$$v(t) = ce^{-2\beta(t-s)} + \frac{\alpha(2\alpha + \sigma^2)}{2\beta^2} + \frac{2\alpha + \sigma^2}{\beta}\left(r_s - \frac{\alpha}{\beta}\right)e^{-\beta(t-s)},$$

且由初始条件 $v(t) = r_s^2$ 得

$$\begin{aligned} v(t) &= r_s^2 e^{-2\beta(t-s)} + \frac{\alpha(2\alpha + \sigma^2)}{2\beta^2} (1 - e^{-2\beta(t-s)}) \\ &\quad + \frac{2\alpha + \sigma^2}{\beta} \left(r_s - \frac{\alpha}{\beta} \right) (e^{-\beta(t-s)} - e^{-2\beta(t-s)}), \end{aligned}$$

$0 \leq s \leq t$. 除此之外我们可计算

$$\begin{aligned} \text{Var}[r_t|r_s] &= E[r_t^2|r_s] - (E[r_t|r_s])^2 \\ &= v(t) - (u(t))^2 \\ &= r_s^2 e^{-2\beta(t-s)} + \frac{\alpha(2\alpha + \sigma^2)}{2\beta^2} (1 - e^{-2\beta(t-s)}) \\ &\quad + \frac{2\alpha + \sigma^2}{\beta} \left(r_s - \frac{\alpha}{\beta} \right) (e^{-\beta(t-s)} - e^{-2\beta(t-s)}) \\ &\quad - \left(\frac{\alpha}{\beta} (1 - e^{-\beta(t-s)}) + r_s e^{-\beta(t-s)} \right)^2 \\ &= r_s^2 e^{-2\beta(t-s)} + \frac{\alpha(2\alpha + \sigma^2)}{2\beta^2} (1 - e^{-2\beta(t-s)}) \\ &\quad + \frac{2\alpha + \sigma^2}{\beta} \left(r_s - \frac{\alpha}{\beta} \right) (e^{-\beta(t-s)} - e^{-2\beta(t-s)}) \\ &\quad - \left(\frac{\alpha}{\beta} (1 - e^{-\beta(t-s)}) \right)^2 - r_s^2 e^{-2\beta(t-s)} - 2\frac{\alpha}{\beta} (1 - e^{-\beta(t-s)}) r_s e^{-\beta(t-s)} \\ &= \frac{\alpha(2\alpha + \sigma^2)}{2\beta^2} (1 - e^{-2\beta(t-s)}) \\ &\quad + \frac{2\alpha + \sigma^2}{\beta} \left(r_s - \frac{\alpha}{\beta} \right) (e^{-\beta(t-s)} - e^{-2\beta(t-s)}) \\ &\quad - \left(\frac{\alpha}{\beta} (1 - e^{-\beta(t-s)}) \right)^2 - 2\frac{\alpha}{\beta} (1 - e^{-\beta(t-s)}) r_s e^{-\beta(t-s)} \\ &= r_s \frac{\sigma^2}{\beta} (e^{-\beta(t-s)} - e^{-2\beta(t-s)}) + \frac{\alpha\sigma^2}{\beta^2} (1 - e^{-\beta(t-s)})^2, \end{aligned}$$

它满足初始条件 $\text{Var}[r_s|r_s] = 0$.

5. 通过直接应用伊藤公式可直接得到该结果。

6. 再次由伊藤公式有

$$dR_t = 2X_t dX_t + \frac{\sigma^2}{4} dt$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{\sigma^2}{4} - \beta X_t^2 \right) dt + \sigma X_t dB_t \\
&= \left(\frac{\sigma^2}{4} - \beta R_t \right) dt + \sigma |X_t| dW_t \\
&= \left(\frac{\sigma^2}{4} - \beta R_t \right) dt + \sigma \sqrt{R_t} dW_t, \quad t > 0.
\end{aligned}$$

同样能够证明 $(W_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ 也是一个布朗运动, 因此就得到(3.4)的一个精确解。

第4章

练习 4.1.

1. 考虑由

$$F(t, x) = \mathbb{E} \left[\exp \left(- \int_t^T r_s ds \right) \mid r_t = x \right], \quad 0 \leq t \leq T$$

定义的函数 $F(t, x)$ 。我们有

$$F(t, r_t) = F(t, r_0 + \theta t + \sigma W_t),$$

因此由标准套利理论, $F(t, x)$ 所满足的偏微分方程式

$$-xF(t, x) + \frac{\partial F}{\partial t}(t, x) + \theta \frac{\partial F}{\partial x}(t, x) + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t, x) = 0,$$

终端条件为 $F(T, x) = 1$ 。

2. 我们有

$$\begin{aligned}
F(t, r_t) &= \mathbb{E} \left[\exp \left(- \int_t^T (r_0 + \theta s + \sigma W_s) ds \right) \mid \mathcal{F}_t \right] \\
&= \exp \left(-(T-t)r_0 - \theta(T^2 - t^2)/2 - \sigma(T-t)W_t \right) \\
&\quad \times \mathbb{E} \left[\exp \left(\sigma \int_t^T (W_s - W_t) ds \right) \mid \mathcal{F}_t \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \exp \left(-(T-t)r_0 - \theta(T^2 - t^2)/2 - \sigma(T-t)W_t \right) \\
 &\quad \times \mathbb{E} \left[\exp \left(\sigma \int_t^T (W_s - W_t) ds \right) \right] \\
 &= \exp \left(-(T-t)r_0 - \theta(T^2 - t^2)/2 - \sigma(T-t)W_t \right) \\
 &\quad \times \mathbb{E} \left[\exp \left(\sigma \int_0^{T-t} W_s ds \right) \right],
 \end{aligned}$$

$0 \leq t \leq T$. 现在有

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E} \left[\exp \left(\sigma \int_0^{T-t} W_s ds \right) \right] &= \mathbb{E} \left[\exp \left(\sigma \int_0^{T-t} \int_0^{T-t} 1_{\{u \leq s\}} dW_u ds \right) \right] \\
 &= \mathbb{E} \left[\exp \left(\sigma \int_0^{T-t} \int_0^{T-t} 1_{\{u \leq s\}} ds dW_u \right) \right] \\
 &= \mathbb{E} \left[\exp \left(\sigma \int_0^{T-t} \int_0^{T-t} 1_{\{u \leq s\}} ds dW_u \right) \right] \\
 &= \mathbb{E} \left[\exp \left(\sigma \int_0^{T-t} \int_u^{T-t} ds dW_u \right) \right] \\
 &= \mathbb{E} \left[\exp \left(\sigma \int_0^{T-t} (T-t-u) dW_u \right) \right] \\
 &= \exp \left(\frac{\sigma^2}{2} \int_0^{T-t} (T-t-u)^2 du \right) \\
 &= \exp \left(\frac{\sigma^2}{2} \int_0^{T-t} u^2 du \right) \\
 &= \exp \left(\frac{\sigma^2}{6} (T-t)^3 \right),
 \end{aligned}$$

hence

$$\begin{aligned}
 F(t, r_t) &= \exp \left(-(T-t)r_0 - \theta(T^2 - t^2)/2 + \sigma^2(T-t)^3/6 - \sigma(T-t)W_t \right) \\
 &= \exp \left(-(T-t)r_0 - \theta(T^2 - t^2)/2 \right. \\
 &\quad \left. + \sigma^2(T-t)^3/6 - (T-t)(r_t - \theta t - r_0) \right),
 \end{aligned}$$

且

$$F(t, x) = \exp \left(-x(T-t) - \theta(T-t)^2/2 + \sigma^2(T-t)^3/6 \right).$$

3. 我们有

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t, x) = (x - \sigma^2(T-t)^2/2 + \theta(T-t))F(t, x),$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(t, x) = -(T - t)F(t, x),$$

且

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t, x) = (T - t)^2 F(t, x),$$

这就证明了 $F(t, x)$ 满足在终端条件 $F(T, T) = 1$ 下的偏微分方程。

练习 4.2.

1. 我们有

$$\begin{aligned} d\left(e^{-\int_0^t r_s ds} P(t, T)\right) &= -e^{-\int_0^t r_s ds} P(t, T) r_t dt + e^{-\int_0^t r_s ds} dP(t, T) \\ &= -e^{-\int_0^t r_s ds} P(t, T) r_t dt + e^{-\int_0^t r_s ds} dF(t, X_t) \\ &= -e^{-\int_0^t r_s ds} P(t, T) r_t dt + e^{-\int_0^t r_s ds} \frac{\partial F}{\partial t}(t, X_t) dt \\ &\quad + e^{-\int_0^t r_s ds} \frac{\partial F}{\partial x}(t, X_t) dX_t + \frac{1}{2} \sigma^2 e^{-\int_0^t r_s ds} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t, X_t) dt \\ &= \sigma e^{-\int_0^t r_s ds} \frac{\partial F}{\partial x}(t, X_t) dB_t \\ &\quad + e^{-\int_0^t r_s ds} \left(-r_t P(t, T) + \frac{\partial F}{\partial t}(t, X_t) - b X_t \frac{\partial F}{\partial x}(t, X_t) - \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t, X_t) \right) dt. \end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned} t \mapsto e^{-\int_0^t r_s ds} P(t, T) &= e^{-\int_0^t r_s ds} \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\exp \left(-\int_t^T r_s ds \right) \mid \mathcal{F}_t \right] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\exp \left(-\int_0^T r_s ds \right) \mid \mathcal{F}_t \right], \end{aligned}$$

是一个鞅，可得

$$-r_t P(t, T) + \frac{\partial F}{\partial t}(t, X_t) - b X_t \frac{\partial F}{\partial x}(t, X_t) + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t, X_t) = 0,$$

和偏微分方程

$$-(r + x)F(t, x) + \frac{\partial F}{\partial t}(t, x) - b x \frac{\partial F}{\partial x}(t, x) + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t, x) = 0.$$

2. 我们有

$$X_t = \sigma \int_0^t e^{-b(t-s)} dB_s, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

3. 对定义 $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ 的随机偏微分方程的等式两边同时积分我们有

$$X_t = -b \int_0^t X_s ds + \sigma B_t,$$

因此

$$\begin{aligned} \int_0^t X_s ds &= \frac{1}{b} (\sigma B_t - X_t) \\ &= \frac{\sigma}{b} \left(B_t - \int_0^t e^{-b(t-s)} dB_s \right) \\ &= \frac{\sigma}{b} \int_0^t (1 - e^{-b(t-s)}) dB_s. \end{aligned}$$

4. 我们有

$$\begin{aligned} \int_t^T X_s ds &= \int_0^T X_s ds - \int_0^t X_s ds \\ &= \frac{\sigma}{b} \int_0^T (1 - e^{-b(T-s)}) dB_s - \frac{\sigma}{b} \int_0^t (1 - e^{-b(t-s)}) dB_s \\ &= -\frac{\sigma}{b} \left(\int_0^t (e^{-b(T-s)} - e^{-b(t-s)}) dB_s + \int_t^T (e^{-b(T-s)} - 1) dB_s \right). \end{aligned}$$

5. 应用推论 1.1, 我们有

$$\begin{aligned} &\mathbb{E} \left[\int_t^T X_s ds \mid \mathcal{F}_t \right] \\ &= -\frac{\sigma}{b} \mathbb{E} \left[\int_0^t (e^{-b(T-s)} - e^{-b(t-s)}) dB_s + \int_t^T (e^{-b(T-s)} - 1) dB_s \mid \mathcal{F}_t \right] \\ &= -\frac{\sigma}{b} \mathbb{E} \left[\int_0^t (e^{-b(T-s)} - e^{-b(t-s)}) dB_s \mid \mathcal{F}_t \right] \\ &\quad - \frac{\sigma}{b} \mathbb{E} \left[\int_t^T (e^{-b(T-s)} - 1) dB_s \mid \mathcal{F}_t \right] \\ &= -\frac{\sigma}{b} \mathbb{E} \left[\int_0^t (e^{-b(T-s)} - e^{-b(t-s)}) dB_s \mid \mathcal{F}_t \right] \\ &= -\frac{\sigma}{b} \int_0^t (e^{-b(T-s)} - e^{-b(t-s)}) dB_s. \end{aligned}$$

6. 我们有

$$\mathbb{E} \left[\int_t^T X_s ds \mid \mathcal{F}_t \right] = -\frac{\sigma}{b} \int_0^t (e^{-b(T-s)} - e^{-b(t-s)}) dB_s$$

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{\sigma}{b}(e^{-b(T-t)} - 1) \int_0^t e^{-b(t-s)} dB_s \\
 &= \frac{X_t}{b}(1 - e^{-b(T-t)}).
 \end{aligned}$$

7. 由附录 A 中给出的方差和条件方差的性质我们有

$$\begin{aligned}
 &\text{Var} \left[\int_t^T X_s ds \mid \mathcal{F}_t \right] \\
 &= \text{Var} \left[-\frac{\sigma}{b} \left(\int_0^t (e^{-b(T-s)} - e^{-b(t-s)}) dB_s + \int_t^T (e^{-b(T-s)} - 1) dB_s \right) \mid \mathcal{F}_t \right] \\
 &= \frac{\sigma^2}{b^2} \text{Var} \left[\int_t^T (e^{-b(T-s)} - 1) dB_s \mid \mathcal{F}_t \right] \\
 &= \frac{\sigma^2}{b^2} \text{Var} \left[\int_t^T (e^{-b(T-s)} - 1) dB_s \right] \\
 &= \frac{\sigma^2}{b^2} \int_t^T (e^{-b(T-s)} - 1)^2 ds.
 \end{aligned}$$

8. 给定 $\mathcal{F}_t$, 随机变量 $\int_t^T X_s ds$ 具有有高斯分布和条件均值

$$\mathbb{E} \left[\int_t^T X_s ds \mid \mathcal{F}_t \right] = \frac{X_t}{b}(1 - e^{-b(T-t)})$$

以及条件方差

$$\text{Var} \left[\int_t^T X_s ds \mid \mathcal{F}_t \right] = \frac{\sigma^2}{b^2} \int_t^T (e^{-b(T-s)} - 1)^2 ds.$$

9. 我们有

$$\begin{aligned}
 P(t, T) &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\exp \left(- \int_t^T r_s ds \right) \mid \mathcal{F}_t \right] \\
 &= \exp \left(-r(T-t) - \mathbb{E} \left[\int_t^T X_s ds \mid \mathcal{F}_t \right] + \frac{1}{2} \text{Var} \left[\int_t^T X_s ds \mid \mathcal{F}_t \right] \right) \\
 &= \exp \left(-r(T-t) - \frac{X_t}{b}(1 - e^{-b(T-t)}) + \frac{\sigma^2}{2b^2} \int_t^T (e^{-b(T-s)} - 1)^2 ds \right).
 \end{aligned}$$

10. 我们有

$$F(t, x) = \exp \left(-r(T-t) - \frac{x}{b}(1 - e^{-b(T-t)}) + \frac{\sigma^2}{2b^2} \int_t^T (e^{-b(T-s)} - 1)^2 ds \right),$$

因此

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t, x) = \left(r + xe^{-b(T-t)} - \frac{\sigma^2}{2b^2}(e^{-b(T-t)} - 1)^2 \right) F(t, x),$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(t, x) = -\frac{1}{b}(1 - e^{-b(T-t)})F(t, x),$$

且

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t, x) = \frac{1}{b^2}(1 - e^{-b(T-t)})^2 F(t, x),$$

这意味着

$$-(r + x)F(t, x) + \frac{\partial F}{\partial t}(t, x) - bx\frac{\partial F}{\partial x}(t, x) + \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t, x) = 0.$$

练习 4.3. 由命题 4.1 债券价格的偏微分方程为

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial t}(t, x) = xF(t, x) - (\alpha - \beta x)\frac{\partial F}{\partial x}(t, x) - \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t, x) \\ F(T, x) = 1. \end{cases}$$

让我们来找形如

$$F(t, x) = e^{A(T-t) - xB(T-t)}$$

的解, 其中 $A(0) = B(0) = 0$, 这意味这

$$\begin{cases} A'(s) = 0 \\ B'(s) + \beta B(s) + \frac{1}{2}\sigma^2 B^2(s) = 1. \end{cases}$$

因此特别对于 $A(s) = 0$, $s \in \mathbb{R}$ 和 $B(s)$ 就求解出 Riccati 方程, 易得其解为

$$B(s) = \frac{2(e^{\gamma s} - 1)}{2\gamma + (\beta + \gamma)(e^{\gamma s} - 1)},$$

有 $\gamma = \sqrt{\beta^2 + 2\sigma^2}$.

练习 4.4.

1. 我们有

$$P(t, T) = P(s, T) \exp \left(\int_s^t r_u du + \int_s^t \sigma_u^T dB_u - \frac{1}{2} \int_s^t |\sigma_u^T|^2 du \right),$$

$$0 \leq s \leq t \leq T.$$

2. 我们有

$$d \left(e^{-\int_0^t r_s ds} P(t, T) \right) = e^{-\int_0^t r_s ds} P(t, T) \sigma_t^T dB_t,$$

由伊藤积分的性质，上式积分后即得鞅。

3. 由前一个方程的鞅性我们有

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[e^{-\int_0^T r_s ds} \mid \mathcal{F}_t \right] &= \mathbb{E} \left[P(T, T) e^{-\int_0^T r_s ds} \mid \mathcal{F}_t \right] \\ &= P(t, T) e^{-\int_0^t r_s ds}, \quad 0 \leq t \leq T. \end{aligned}$$

4. 由前一个问题我们有

$$\begin{aligned} P(t, T) &= e^{\int_0^t r_s ds} \mathbb{E} \left[e^{-\int_0^T r_s ds} \mid \mathcal{F}_t \right] \\ &= \mathbb{E} \left[e^{\int_0^t r_s ds} e^{-\int_0^T r_s ds} \mid \mathcal{F}_t \right] \\ &= \mathbb{E} \left[e^{-\int_t^T r_s ds} \mid \mathcal{F}_t \right], \quad 0 \leq t \leq T, \end{aligned}$$

由于 $e^{-\int_0^t r_s ds}$ 是一个 $\mathcal{F}_t$ -可测的随机变量。

5. 我们有

$$\begin{aligned} \frac{P(t, S)}{P(t, T)} &= \frac{P(s, S)}{P(s, T)} \exp \left(\int_s^t (\sigma_u^S - \sigma_u^T) dB_u - \frac{1}{2} \int_s^t (|\sigma_u^S|^2 - |\sigma_u^T|^2) du \right) \\ &= \frac{P(s, S)}{P(s, T)} \exp \left(\int_s^t (\sigma_u^S - \sigma_u^T) dB_u^T - \frac{1}{2} \int_s^t (\sigma_u^S - \sigma_u^T)^2 du \right), \end{aligned}$$

$0 \leq t \leq T$ ，因此在前面的表达式中设 $s = t$ 和 $t = T$ 有

$$P(T, S) = \frac{P(t, S)}{P(t, T)} \exp \left(\int_t^T (\sigma_s^S - \sigma_s^T) dB_s^T - \frac{1}{2} \int_t^T (\sigma_s^S - \sigma_s^T)^2 ds \right).$$

练习 4.5. 我们可检验 $P(T, T) = e^{X_T^T} = 1$.

第5章

练习 5.1.

1. 我们有

$$\log P(t, T) = -(T-t)r_0 - \theta(T^2 - t^2)/2 + \sigma^2(T-t)^3/6 - (T-t)(r_t - \theta t - r_0)$$

和

$$\log P(t, S) = -(S-t)r_0 - \theta(S^2 - t^2)/2 + \sigma^2(S-t)^3/6 - (S-t)(r_t - \theta t - r_0),$$

因此

$$\begin{aligned} \log P(t, T) - \log P(t, S) \\ = \theta(S^2 - T^2)/2 + \sigma^2(T-t)^3/6 + (S-T)(r_t - \theta t) + \sigma^2(S-t)^3/6, \end{aligned}$$

且

$$\begin{aligned} f(t, T, S) &= \frac{1}{S-T}(\log P(t, T) - \log P(t, S)) \\ &= \frac{1}{S-T}(\theta(S^2 - T^2)/2 + \sigma^2(T-t)^3/6 \\ &\quad + (S-T)(r_t - \theta t) + \sigma^2(S-t)^3/6). \end{aligned}$$

2. 我们有

$$\begin{aligned} f(t, T) &= -\frac{\partial}{\partial T} \log P(t, T) \\ &= r_0 + T\theta - \sigma^2(T-t)^2/2 + (r_t - \theta t - r_0) \\ &= (T-t)\theta - \sigma^2(T-t)^2/2 + r_t \\ &= f(0, T) + \sigma^2 t(T-t/2) + \sigma W_t. \end{aligned}$$

练习 5.2.

1. 我们有

$$f(t, T, S) = -\frac{\log P(t, S) - \log P(t, T)}{S - T}$$

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{-r(S-t) - \frac{X_t}{b}(1 - e^{-b(S-t)}) - \frac{\sigma^2}{2b^2} \int_t^S (e^{-b(S-s)} - 1)^2 ds}{S-T} \\
 &\quad + \frac{-r(T-t) - \frac{X_t}{b}(1 - e^{-b(T-t)}) - \frac{\sigma^2}{2b^2} \int_t^T (e^{-b(T-s)} - 1)^2 ds}{S-T} \\
 &= r - \frac{X_t}{b} \frac{e^{-b(S-t)} - e^{-b(T-t)}}{S-T} \\
 &\quad + \frac{\sigma^2}{2b^2} \int_t^S \frac{(e^{-b(S-s)} - 1)^2 - (e^{-b(T-s)} - 1)^2}{S-T} ds.
 \end{aligned}$$

2. 我们有

$$\begin{aligned}
 f(t, T) &= \lim_{S \searrow T} f(t, T, S) \\
 &= r + X_t e^{-b(T-t)} - \frac{\sigma^2}{b^2} \int_t^T e^{-b(T-s)} (e^{-b(T-s)} - 1) ds \\
 &= r + X_t e^{-b(T-t)} - \frac{\sigma^2}{2b^2} (1 - e^{-b(T-t)})^2.
 \end{aligned}$$

练习 5.3.

1. 我们有

$$\begin{aligned}
 f(t, T, S) &= -\frac{1}{S-T} (X_t^S - X_t^T - \mu(S-T)) \\
 &= \mu - \sigma \frac{1}{S-T} \left((S-t) \int_0^t \frac{1}{S-s} dB_s - (T-t) \int_0^t \frac{1}{T-s} dB_s \right) \\
 &= \mu - \sigma \frac{1}{S-T} \int_0^t \left(\frac{S-t}{S-s} - \frac{T-t}{T-s} \right) dB_s \\
 &= \mu - \sigma \frac{1}{S-T} \int_0^t \frac{(T-s)(S-t) - (T-t)(S-s)}{(S-s)(T-s)} dB_s \\
 &= \mu + \frac{\sigma}{S-T} \int_0^t \frac{(s-t)(S-T)}{(S-s)(T-s)} dB_s.
 \end{aligned}$$

2. 我们有

$$f(t, T) = \mu - \sigma \int_0^t \frac{t-s}{(T-s)^2} dB_s.$$

3. 注意到

$$\lim_{T \searrow t} f(t, T) = \mu - \sigma \int_0^t \frac{1}{t-s} dB_s$$

在 $L^2(\Omega)$ 中不存在。

4. 由伊藤公式我们有

$$\begin{aligned} \frac{dP(t, T)}{P(t, T)} &= \sigma dB_t + \frac{1}{2} \sigma^2 dt + \mu dt - \frac{X_t^T}{T-t} dt \\ &= \sigma dB_t + \frac{1}{2} \sigma^2 dt - \frac{\log P(t, T)}{T-t} dt, \quad t \in [0, T]. \end{aligned}$$

5. 设

$$\begin{aligned} r_t^S &= \mu + \frac{1}{2} \sigma^2 - \frac{X_t^S}{S-t} \\ &= \mu + \frac{1}{2} \sigma^2 - \sigma \int_0^t \frac{1}{S-s} dB_s, \end{aligned}$$

且由练习 4.5-(4) 的结果可得。

第6章

练习 6.1.

1. 我们有

$$d_t f(t, T) = \sigma^2 (T-t) dt - \theta dt + dr_t = \sigma^2 (T-t) dt + \sigma dW_t.$$

2. 由于漂移项 $d_t f(t, T)$ 等于 $\sigma \int_t^T \sigma ds$ 则 HJM 条件得到满足

练习 6.2.

1. 我们有

$$\begin{aligned} d_t f(t, T) &= e^{-b(T-t)} dX_t + bX_t e^{-b(T-t)} dt + \frac{\sigma^2}{b} e^{-b(T-t)} (1 - e^{-b(T-t)}) dt \\ &= \frac{\sigma^2}{b} e^{-b(T-t)} (1 - e^{-b(T-t)}) dt + \sigma e^{-b(T-t)} dB_t. \end{aligned}$$

2. 我们有

$$\frac{\sigma^2}{b} e^{-b(T-t)} (1 - e^{-b(T-t)}) = \sigma e^{-b(T-t)} \int_t^T \sigma e^{-b(T-s)} ds,$$

这就是HJM 无套利条件。

第7章

练习 7.1.

1. 我们有

$$dP(t, T) = dF(t, r_t) = r_t P(t, T) dt + \sigma \frac{\partial F}{\partial x}(t, r_t) dW_t,$$

其中由鞅性 $t \mapsto e^{-\int_0^t r_s ds} P(t, T)$, dt 的其余项加起来等于零。因此

$$dP(t, T) = r_t P(t, T) dt - \sigma(T-t) F(t, x) dW_t,$$

和

$$\frac{dP(t, T)}{P(t, T)} = r_t dt - (T-t) \sigma dW_t.$$

2. 由问题 1 我们有

$$\begin{aligned} & d \left(\exp \left(- \int_0^t r_s ds \right) P(t, T) \right) \\ &= -r_t \exp \left(- \int_0^t r_s ds \right) P(t, T) dt + \exp \left(- \int_0^t r_s ds \right) dP(t, T) \\ &= \sigma \exp \left(- \int_0^t r_s ds \right) \frac{\partial F}{\partial x}(t, r_t) dW_t \\ &= -\sigma(T-t) \exp \left(- \int_0^t r_s ds \right) F(t, r_t) dW_t. \end{aligned}$$

3. 我们有

$$\Psi(t) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\frac{d\tilde{\mathbb{P}}}{d\mathbb{P}} \mid \mathcal{F}_t \right] = \frac{P(t, T)}{P(0, T)} e^{-\int_0^t r_s ds}, \quad t \in [0, T].$$

4. 我们有

$$d\Psi(t) = \Psi(t)\zeta_t dW_t,$$

其中

$$\zeta_t = -\sigma(T-t).$$

5. 我们有

$$\Psi(t) = \exp\left(\int_0^t \zeta_s dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t \zeta_s^2 ds\right),$$

因此

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\frac{d\tilde{\mathbb{P}}}{d\mathbb{P}} \mid \mathcal{F}_T\right] = \Psi(T) = \exp\left(\int_0^T \zeta_s dW_s - \frac{1}{2} \int_0^T \zeta_s^2 ds\right).$$

6. 由Girsanov 定理,

$$d\hat{W}_t = \sigma(T-t)dt + dW_t$$

是在 $\tilde{\mathbb{P}}$ 下的一个标准布朗运动, 因此在 $\tilde{\mathbb{P}}$ 下我们得到动态

$$dr_t = \theta dt + \sigma dW_t = (\theta - \sigma^2(T-t))dt + \sigma d\hat{W}_t.$$

7. 我们有

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}\left[e^{-\int_t^T r_s ds}(P(T, S) - K)^+ \mid \mathcal{F}_t\right] \\ &= P(t, T)\tilde{\mathbb{E}}\left[(P(T, S) - K)^+ \mid \mathcal{F}_t\right] \\ &= P(t, T)\tilde{\mathbb{E}}\left[(e^{-(S-T)r_0 - \theta(S^2 - T^2)/2 + \sigma^2(S-T)^3/6 - \sigma(S-T)W_T} - K)^+ \mid \mathcal{F}_t\right] \\ &= P(t, T) \\ & \quad \times \tilde{\mathbb{E}}\left[\left(e^{-(S-T)r_0 - \frac{\theta}{2}(S^2 - T^2) + \frac{\sigma^2}{6}(S-T)^3 - (S-T)\sigma\left(-\sigma\int_0^T(T-t)dt + \tilde{W}_T\right)} - K\right)^+ \mid \mathcal{F}_t\right] \\ &= P(t, T) \\ & \quad \times \tilde{\mathbb{E}}\left[\left(e^{-(S-T)r_0 - \frac{\theta}{2}(S^2 - T^2) + \frac{\sigma^2}{6}(S-T)^3 - (S-T)\sigma\left(-\sigma T^2/2 + \tilde{W}_T\right)} - K\right)^+ \mid \mathcal{F}_t\right] \\ &= P(t, T)\mathbb{E}[(e^{m+X} - K)^+ | \mathcal{F}_t], \end{aligned}$$

其中

$$m = -(S-T)r_0 - \frac{\theta}{2}(S^2 - T^2) + \frac{\sigma^2}{6}(S-T)^3$$

$$\begin{aligned}
 & -(S - T)\sigma \left(-\sigma T^2/2 + \tilde{W}_t \right) \\
 = & -(S - T)r_0 - \frac{\theta}{2}(S^2 - T^2) + \frac{\sigma^2}{6}(S - T)^3 \\
 & + (S - T)\sigma \left(\sigma T^2/2 + \sigma t^2/2 - \sigma tT - W_t \right),
 \end{aligned}$$

和 X 是中心高斯的并有条件方差

$$v^2 = (S - T)^2 \sigma^2 (T - t)$$

因此

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{E} \left[e^{-\int_t^T r_s ds} (P(T, S) - K)^+ \mid \mathcal{F}_t \right] \\
 = & P(t, T) e^{m + \frac{v^2}{2}} \Phi(v + (m - \log K)/v) - KP(t, T) \Phi((m - \log K)/v),
 \end{aligned}$$

其中

$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^z e^{-y^2/2} \frac{dy}{\sqrt{2\pi}}, \quad z \in \mathbb{R}.$$

现在

$$t \mapsto \frac{P(t, S)}{P(t, T)}$$

是在 $\tilde{\mathbb{P}}$ 下的鞅 (参见命题 7.2), 因此

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}} \left[P(T, S) \mid \mathcal{F}_t \right] &= \mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}} \left[\frac{P(T, S)}{P(T, T)} \mid \mathcal{F}_t \right] \\
 &= \mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}} \left[\frac{P(T, S)}{P(T, T)} \mid \mathcal{F}_t \right] \\
 &= \frac{P(t, S)}{P(t, T)},
 \end{aligned}$$

且

$$\frac{P(t, S)}{P(t, T)} = \mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}} \left[P(T, S) \mid \mathcal{F}_t \right] = \mathbb{E}[e^{m+X} | \mathcal{F}_t],$$

其中 X 是中心高斯随机变量且有方差 v^2 , 因此

$$m + \frac{1}{2}v^2 = \log \frac{P(t, S)}{P(t, T)}. \quad (13.1)$$

作为一个结果,

$$\mathbb{E} \left[e^{-\int_t^T r_s ds} (P(T, S) - K)^+ \mid \mathcal{F}_t \right]$$

$$= P(t, S) \Phi \left(\frac{v}{2} + \frac{1}{v} \log \frac{P(t, S)}{KP(t, T)} \right) - KP(t, T) \Phi \left(-\frac{v}{2} + \frac{1}{v} \log \frac{P(t, S)}{KP(t, T)} \right).$$

注意到关系式 13.1 可重新通过 “直接计算” 得到而不是用鞅理论：则有

$$\begin{aligned} & \log P(t, T) - \log P(t, S) \\ &= -(T-t)r_0 - \theta(T^2 - t^2)/2 + \sigma^2(T-t)^3/6 - \sigma(T-t)W_t \\ & \quad - (-(S-t)r_0 - \theta(S^2 - t^2)/2 + \sigma^2(S-t)^3/6 - \sigma(S-t)W_t) \\ &= -(T-S)r_0 - \theta(T^2 - S^2)/2 - \sigma(T-S)W_t \\ & \quad + \sigma^2((T-t)^3 - (S-t)^3)/6, \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} m &= \log P(t, S) - \log P(t, T) + \sigma^2((T-t)^3 - (S-t)^3)/6 + \frac{\sigma^2}{6}(S-T)^3 \\ & \quad + (S-T)\sigma^2(T^2/2 + t^2/2) - \sigma^2 t T(S-T) \\ &= \log P(t, S) - \log P(t, T) + \sigma^2(T^3 - 3tT^2 + 3Tt^2 - S^3 + 3tS^2 - 3St^2)/6 \\ & \quad + \frac{\sigma^2}{6}(S-T)^3 + (S-T)\sigma^2(T^2/2 + t^2/2) - \sigma^2 t T(S-T) \\ &= \log P(t, S) - \log P(t, T) + \sigma^2(-3tT^2 + 3Tt^2 + 3tS^2 - 3St^2)/6 \\ & \quad + \frac{\sigma^2}{6}(-3TS^2 + 3ST^2) + (S-T)\sigma^2(T^2/2 + t^2/2) - \sigma^2 t T(S-T), \end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned} m + \frac{v^2}{2} &= \log P(t, S) - \log P(t, T) + \sigma^2(-3tT^2 + 3Tt^2 + 3tS^2 - 3St^2)/6 \\ & \quad + \frac{\sigma^2}{6}(-3TS^2 + 3ST^2) + (S-T)\sigma^2(T^2/2 + t^2/2) \\ & \quad + \frac{1}{2}\sigma^2(S^2 - 2ST + T^2)(T-t) - \sigma^2 t T(S-T) \\ &= \log P(t, S) - \log P(t, T). \end{aligned}$$

练习 7.2.

1. 由问题 9 的结果我们有

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\frac{d\tilde{\mathbb{P}}}{d\mathbb{P}} \mid \mathcal{F}_t \right]$$

$$\begin{aligned}
&= e^{-\int_0^t r_s ds} \frac{P(t, T)}{P(0, T)} \\
&= \exp \left(-\int_0^t r_s ds + rt - \frac{\sigma^2}{2b^2} \int_0^t (e^{-b(T-s)} - 1)^2 ds - \frac{X_t}{b} (1 - e^{-b(T-t)}) \right) \\
&= \exp \left(-\int_0^t X_s ds - \frac{\sigma^2}{2b^2} \int_0^t (e^{-b(T-s)} - 1)^2 ds - \frac{X_t}{b} (1 - e^{-b(T-t)}) \right) \\
&= \exp \left(\frac{1}{b} (X_t - \sigma B_t) - \frac{\sigma^2}{2b^2} \int_0^t (e^{-b(T-s)} - 1)^2 ds - \frac{X_t}{b} (1 - e^{-b(T-t)}) \right) \\
&= \exp \left(-\frac{\sigma}{b} B_t - \frac{\sigma^2}{2b^2} \int_0^t (e^{-b(T-s)} - 1)^2 ds + \frac{X_t}{b} e^{-b(T-t)} \right) \\
&= \exp \left(-\frac{\sigma}{b} B_t - \frac{\sigma^2}{2b^2} \int_0^t (e^{-b(T-s)} - 1)^2 ds + \frac{\sigma}{b} \int_0^t e^{-b(T-s)} dB_s \right) \\
&= \exp \left(-\frac{\sigma}{b} \int_0^t (1 - e^{-b(T-s)}) dB_s - \frac{\sigma^2}{2b^2} \int_0^t (e^{-b(T-s)} - 1)^2 ds \right),
\end{aligned}$$

且特别地对于 $t = T$ 我们有

$$\frac{d\tilde{\mathbb{P}}}{d\mathbb{P}} = \exp \left(-\frac{\sigma}{b} \int_0^T (1 - e^{-b(T-s)}) dB_s - \frac{\sigma^2}{2b^2} \int_0^T (e^{-b(T-s)} - 1)^2 ds \right).$$

2. 由 Girsanov 定理,

$$\hat{B}_t := B_t + \frac{\sigma}{b} \int_0^t (1 - e^{-b(T-s)}) ds, \quad 0 \leq t \leq T,$$

是一个在远期测度 $\tilde{\mathbb{P}}$ 下的标准布朗运动且我们有

$$dr_t = dX_t = -bX_t dt + \sigma dB_t = -bX_t dt - \frac{\sigma^2}{b} (1 - e^{-b(T-t)}) dt + \sigma d\hat{B}_t.$$

3. 当 $b = 0$ 我们有

$$P(t, T) = \exp \left(-r(T-t) - (T-t)X_t + \frac{\sigma^2}{2} \int_t^T (T-s)^2 ds \right)$$

且

$$X_T = -\sigma^2 \int_0^T (T-s) ds + \sigma \hat{B}_T = -\frac{\sigma^2}{2} T^2 + \sigma \hat{B}_T,$$

因此

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[e^{-\int_0^T r_s ds} (P(T, S) - K)^+ \right] = P(0, T) \mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}} \left[(P(T, S) - K)^+ \right]$$

$$\begin{aligned}
 &= P(0, T) \mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}} \left[\left(e^{-r(S-T) - (S-T)X_T + \frac{\sigma^2}{2} \int_T^S (S-s)^2 ds} - K \right)^+ \right] \\
 &= P(0, T) \mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}} \left[\left(e^{-r(S-T) - (S-T) \left(-\frac{\sigma^2}{2} T^2 + \sigma \hat{B}_T \right) + \frac{\sigma^2}{2} \int_T^S (S-s)^2 ds} - K \right)^+ \right] \\
 &= P(0, T) \mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}} \left[\left(e^{-r(S-T) + \frac{\sigma^2}{2} (S-T)T^2 + \frac{\sigma^2}{6} (S-T)^3 - (S-T)\sigma \hat{B}_T} - K \right)^+ \right].
 \end{aligned}$$

由关系式

$$\mathbb{E}[(e^{m+X} - K)^+] = e^{m+v^2/2} \Phi(v + (m - \log K)/v) - K \Phi((m - \log K)/v),$$

其中 $m = -r(S-T) + \frac{\sigma^2}{2}(S-T)T^2 + \frac{\sigma^2}{6}(S-T)^3$, X 是一个方差为 $v^2 = \sigma^2 T(S-T)^2$ 的中心化高斯随机变量且

$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^z e^{-y^2/2} \frac{dy}{\sqrt{2\pi}}, \quad z \in \mathbb{R},$$

并且

$$\begin{aligned}
 -v^2/2 + \log(P(0, S)/P(0, T)) &= -\frac{1}{2}\sigma^2 T(S-T)^2 - rS + \frac{\sigma^2}{6}S^3 \\
 &\quad -(-rT + \frac{\sigma^2}{6}T^3) \\
 &= m,
 \end{aligned} \tag{13.2}$$

我们最后可得

$$\begin{aligned}
 &\mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}} \left[e^{-\int_0^T r_s ds} (P(T, S) - K)^+ \right] \\
 &= P(0, S) \Phi \left(\frac{1}{v} \log \frac{P(0, S)}{KP(0, T)} + \frac{v}{2} \right) - KP(0, T) \Phi \left(\frac{1}{v} \log \frac{P(0, S)}{KP(0, T)} - \frac{v}{2} \right).
 \end{aligned}$$

另一方面, 关系式 (13.2) 可独立地从事实

$$t \mapsto \frac{P(t, S)}{P(t, T)}$$

是一个在 $\tilde{\mathbb{P}}$ 下的鞅得到 (参见第 7 章). 因此

$$\mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}} \left[P(T, S) \mid \mathcal{F}_t \right] = \mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}} \left[\frac{P(T, S)}{P(T, T)} \mid \mathcal{F}_t \right] = \frac{P(t, S)}{P(t, T)},$$

并且

$$\frac{P(0, S)}{P(0, T)} = \mathbb{E}_{\tilde{P}} \left[P(T, S) \mid \mathcal{F}_0 \right] = \mathbb{E}[(e^{m+X} - K)^+],$$

其中 X 是一个方差为 v^2 的中心高斯随机变量, 因此

$$m + \frac{1}{2}v^2 = \log \frac{P(0, S)}{P(0, T)}.$$

练习 7.3. 回顾定义为

$$\frac{d\mathbb{P}_{i|\mathcal{F}_t}}{d\mathbb{P}_{|\mathcal{F}_t}} = \frac{e^{-\int_t^{T_i} r_s ds}}{P(t, T_i)}, \quad 0 \leq t \leq T_i, \quad i = 1, 2,$$

的远期测度, 有

$$\mathbb{E} \left[\frac{d\mathbb{P}_i}{d\mathbb{P}} \mid \mathcal{F}_t \right] = \frac{P(t, T_i)}{P(0, T_i)} e^{-\int_0^t r_s ds}, \quad 0 \leq t \leq T_i, \quad i = 1, 2.$$

远期互换测度定义为

$$\frac{d\mathbb{P}_{1,2|\mathcal{F}_t}}{d\mathbb{P}_{|\mathcal{F}_t}} = \frac{P(T_1, T_2)}{P(t, T_2)} e^{-\int_t^{T_1} r_s ds}, \quad 0 \leq t \leq T_1,$$

且有

$$\mathbb{E} \left[\frac{d\mathbb{P}_{1,2}}{d\mathbb{P}} \mid \mathcal{F}_t \right] = \frac{P(t, T_2)}{P(0, T_2)} e^{-\int_0^t r_s ds}, \quad 0 \leq t \leq T_1.$$

特别地,

$$\mathbb{E} \left[\frac{d\mathbb{P}_{1,2}}{d\mathbb{P}} \mid \mathcal{F}_{T_1} \right] = \mathbb{E} \left[\frac{d\mathbb{P}_2}{d\mathbb{P}} \mid \mathcal{F}_{T_1} \right] = \frac{P(T_1, T_2)}{P(0, T_2)} e^{-\int_0^{T_1} r_s ds},$$

这意味这

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[e^{-\int_0^{T_2} r_s ds} F \right] &= P(0, T_2) \mathbb{E} \left[\frac{P(T_1, T_2)}{P(0, T_2)} e^{-\int_0^{T_1} r_s ds} F \right] \\ &= P(0, T_2) \mathbb{E}_2[F] \\ &= P(0, T_2) \mathbb{E}_{1,2}[F], \end{aligned}$$

对于所有可积的 $\mathcal{F}_{T_1}$ 可测的 F 。更进一步,

$$dB_t^i := dB_t - \zeta_t^i dt$$

是一个在下 $\mathbb{P}_i$, $i = 1, 2$ 的标准布朗运动。除此之外 $(B_t^2)_{t \in [0, T_1]}$ 也是一个直到 T_1 为止在 $\mathbb{P}_{1,2}$ 下的标准布朗运动。我们有

$$\mathbb{E}_{1,2} \left[\frac{d\mathbb{P}_k}{d\mathbb{P}_{1,2}} \mid \mathcal{F}_t \right] = \frac{P(0, T_2)}{P(0, T_k)} \frac{P(t, T_k)}{P(t, T_2)} \quad 0 \leq t \leq T_1, \quad k = 1, 2,$$

且过程

$$t \mapsto \frac{P(t, T_1)}{P(t, T_2)}, \quad 0 \leq t \leq T_1,$$

是一个在 $\mathbb{P}_2$ 下和 $\mathbb{P}_{1,2}$ 下的 $\mathcal{F}_t$ -鞅, 而

$$t \mapsto \frac{P(t, T_2)}{P(t, T_1)}, \quad 0 \leq t \leq T_1,$$

是一个在 $\mathbb{P}_1$ 下的 $\mathcal{F}_t$ -鞅。

1. 我们哟

$$\frac{dP(t, T_i)}{P(t, T_i)} = r_t dt + \zeta_t^i dB_t, \quad i = 1, 2,$$

和

$$P(T, T_i) = P(t, T_i) \exp \left(\int_t^T r_s ds + \int_t^T \zeta_s^i dB_s - \frac{1}{2} \int_t^T (\zeta_s^i)^2 ds \right),$$

$0 \leq t \leq T \leq T_i$, $i = 1, 2$, 因此

$$\log P(T, T_i) = \log P(t, T_i) + \int_t^T r_s ds + \int_t^T \zeta_s^i dB_s - \frac{1}{2} \int_t^T (\zeta_s^i)^2 ds,$$

$0 \leq t \leq T \leq T_i$, $i = 1, 2$, 和

$$d \log P(t, T_i) = r_t dt + \zeta_t^i dB_t - \frac{1}{2} (\zeta_t^i)^2 dt, \quad i = 1, 2.$$

在 Vasicek 模型中

$$dr_t = -br_t dt + \sigma dB_t,$$

其中 $(B_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ 是一个在 $\mathbb{P}$ 下的标准布朗运动, 我们有

$$\zeta_t^i = -\frac{\sigma}{b}(1 - e^{-b(T_i-t)}), \quad 0 \leq t \leq T_i, \quad i = 1, 2.$$

设

$$dB_t^i = dB_t - \zeta_t^i dt,$$

它是一个在 $\mathbb{P}_i$, $i = 1, 2$ 下的标准布朗运动。

我们同样有

$$\begin{aligned} \frac{P(T, T_1)}{P(T, T_2)} &= \frac{P(t, T_1)}{P(t, T_2)} \exp \left(\int_t^T (\zeta_s^1 - \zeta_s^2) dB_s - \frac{1}{2} \int_t^T ((\zeta_s^1)^2 - (\zeta_s^2)^2) ds \right) \\ &= \frac{P(t, T_1)}{P(t, T_2)} \exp \left(\int_t^T (\zeta_s^1 - \zeta_s^2) dB_s^2 - \frac{1}{2} \int_t^T (\zeta_s^1 - \zeta_s^2)^2 ds \right), \end{aligned}$$

它是一个在 $\mathbb{P}_2$ 和 $\mathbb{P}_{1,2}$ 下的 $\mathcal{F}_t$ -鞅, 且有

$$\frac{P(T, T_2)}{P(T, T_1)} = \frac{P(t, T_2)}{P(t, T_1)} \exp \left(- \int_t^T (\zeta_s^1 - \zeta_s^2) dB_s^1 - \frac{1}{2} \int_t^T (\zeta_s^1 - \zeta_s^2)^2 ds \right),$$

它是一个在 $\mathbb{P}_1$ 下的 $\mathcal{F}_t$ -鞅。

2. 我们有

$$f(t, T_1, T_2) = -\frac{1}{T_2 - T_1} (\log P(t, T_2) - \log P(t, T_1))$$

且在 Vasicek 情形下,

$$\begin{aligned} f(t, T_1, T_2) &= -\frac{\sigma^2}{2b} \\ &\quad - \frac{1}{T_2 - T_1} \left(\left(\frac{r_t}{b} + \frac{\sigma^2}{b^3} \right) (e^{-b(T_2-t)} - e^{-b(T_1-t)}) - \frac{\sigma^2}{4b^3} (e^{-2b(T_2-t)} - e^{-2b(T_1-t)}) \right). \end{aligned}$$

3. 我们有

$$\begin{aligned} df(t, T_1, T_2) &= -\frac{1}{T_2 - T_1} d \log (P(t, T_2)/P(t, T_1)) \\ &= -\frac{1}{T_2 - T_1} \left((\zeta_t^2 - \zeta_t^1) dB_t - \frac{1}{2} ((\zeta_t^2)^2 - (\zeta_t^1)^2) dt \right) \\ &= -\frac{1}{T_2 - T_1} \left((\zeta_t^2 - \zeta_t^1) (dB_t^2 + \zeta_t^2 dt) - \frac{1}{2} ((\zeta_t^2)^2 - (\zeta_t^1)^2) dt \right) \\ &= -\frac{1}{T_2 - T_1} \left((\zeta_t^2 - \zeta_t^1) dB_t^2 - \frac{1}{2} (\zeta_t^2 - \zeta_t^1)^2 dt \right). \end{aligned}$$

4. 我们有

$$\begin{aligned}
 f(T, T_1, T_2) &= -\frac{1}{T_2 - T_1} \log(P(T, T_2)/P(T, T_1)) \\
 &= f(t, T_1, T_2) - \frac{1}{T_2 - T_1} \left(\int_t^T (\zeta_s^2 - \zeta_s^1) dB_s - \frac{1}{2} ((\zeta_s^2)^2 - (\zeta_s^1)^2) ds \right) \\
 &= f(t, T_1, T_2) - \frac{1}{T_2 - T_1} \left(\int_t^T (\zeta_s^2 - \zeta_s^1) dB_s^2 - \frac{1}{2} \int_t^T (\zeta_s^2 - \zeta_s^1)^2 ds \right) \\
 &= f(t, T_1, T_2) - \frac{1}{T_2 - T_1} \left(\int_t^T (\zeta_s^2 - \zeta_s^1) dB_s^1 + \frac{1}{2} \int_t^T (\zeta_s^2 - \zeta_s^1)^2 ds \right).
 \end{aligned}$$

因此给定 $\mathcal{F}_t$ 和分别在 $\mathbb{P}_1$ 和 $\mathbb{P}_2$ 下的条件均值

$$m = f(t, T_1, T_2) + \frac{1}{2} \int_t^T (\zeta_s^2 - \zeta_s^1)^2 ds,$$

$$m = f(t, T_1, T_2) - \frac{1}{2} \int_t^T (\zeta_s^2 - \zeta_s^1)^2 ds$$

以及方差

$$v^2 = \frac{1}{(T_2 - T_1)^2} \int_t^T (\zeta_s^2 - \zeta_s^1)^2 ds,$$

$f(T, T_1, T_2)$ 具有高斯分布。因此

$$\begin{aligned}
 &(T_2 - T_1) \mathbb{E} \left[e^{-\int_t^{T_2} r_s ds} (f(T_1, T_1, T_2) - \kappa)^+ \mid \mathcal{F}_t \right] \\
 &= (T_2 - T_1) P(t, T_2) \mathbb{E}_2 \left[(f(T_1, T_1, T_2) - \kappa)^+ \mid \mathcal{F}_t \right] \\
 &= (T_2 - T_1) P(t, T_2) \mathbb{E}_2 \left[(m + X - \kappa)^+ \mid \mathcal{F}_t \right] \\
 &= (T_2 - T_1) P(t, T_2) \left(\frac{v}{\sqrt{2\pi}} e^{-(\kappa - m)^2 / (2v^2)} + (m - \kappa) \Phi((m - \kappa)/v) \right).
 \end{aligned}$$

练习 7.4. 我们有

$$\begin{aligned}
 &P(t, T) \mathbb{E}_T [(P(T, S) - \kappa)^+] \\
 &= P(t, T) \mathbb{E}_T \left[\left(\frac{P(t, S)}{P(t, T)} \exp \left(\int_t^T (\sigma_s^S - \sigma_s^T) dB_s^T - \frac{1}{2} \int_t^T (\sigma_s^S - \sigma_s^T)^2 ds \right) - \kappa \right)^+ \right] \\
 &= P(t, T) \mathbb{E}[(e^X - \kappa)^+ \mid \mathcal{F}_t]
 \end{aligned}$$

$$= e^{m_t + v_t^2/2} \Phi \left(\frac{v_t}{2} + \frac{1}{v_t} (m_t + v_t^2/2 - \log \kappa) \right) - \kappa \Phi \left(-\frac{v_t}{2} + \frac{1}{v_t} (m_t + v_t^2/2 - \log \kappa) \right),$$

且有

$$m_t = \log(P(t, S)/P(t, T)) - \frac{1}{2} \int_t^T (\sigma_s^S - \sigma_s^T)^2 ds$$

和

$$v_t^2 = \int_t^T (\sigma_s^S - \sigma_s^T)^2 ds,$$

即

$$\begin{aligned} & P(t, T) \mathbb{E}_T [(P(T, S) - \kappa)^+] \\ &= P(t, S) \Phi \left(\frac{v_t}{2} + \frac{1}{v_t} \log \frac{P(t, S)}{\kappa P(t, T)} \right) - \kappa P(t, T) \Phi \left(-\frac{v_t}{2} + \frac{1}{v_t} \log \frac{P(t, S)}{\kappa P(t, T)} \right). \end{aligned}$$

练习 7.5.

1. 我们有

$$\mathbb{E} \left[\frac{d\mathbb{P}_T}{d\mathbb{P}} \mid \mathcal{F}_t \right] = e^{\sigma B_t - \sigma^2 t/2}.$$

2. 由Girsanov 定理, 过程 $\tilde{B}_t := B_t - \sigma t$ 是一个在 $\mathbb{P}_T$ 下的标准布朗运动。

3. 我们有

$$\begin{aligned} \log P(T, S) &= -\mu(S - T) + \sigma(S - T) \int_0^T \frac{1}{S - s} dB_s \\ &= -\mu(S - T) + \sigma(S - T) \int_0^t \frac{1}{S - s} dB_s + \sigma(S - T) \int_t^T \frac{1}{S - s} dB_s \\ &= \frac{S - T}{S - t} \log P(t, S) + \sigma(S - T) \int_t^T \frac{1}{S - s} dB_s \\ &= \frac{S - T}{S - t} \log P(t, S) + \sigma(S - T) \int_t^T \frac{1}{S - s} d\tilde{B}_s + \sigma^2(S - T) \int_t^T \frac{1}{S - s} ds \\ &= \frac{S - T}{S - t} \log P(t, S) + \sigma(S - T) \int_t^T \frac{1}{S - s} d\tilde{B}_s + \sigma^2(S - T) \log \frac{S - t}{S - T}, \end{aligned}$$

$$0 < T < S.$$

4. 我们有

$$P(t, T) \mathbb{E}_T [(P(T, S) - K)^+ \mid \mathcal{F}_t]$$

$$\begin{aligned}
 &= P(t, T) \mathbb{E}[(e^X - \kappa)^+ | \mathcal{F}_t] \\
 &= P(t, T) e^{m_t + v_t^2/2} \Phi\left(\frac{v_t}{2} + \frac{1}{v_t}(m_t + v_t^2/2 - \log \kappa)\right) \\
 &\quad - \kappa P(t, T) \Phi\left(-\frac{v_t}{2} + \frac{1}{v_t}(m_t + v_t^2/2 - \log \kappa)\right) \\
 &= P(t, T) e^{m_t + v_t^2/2} \Phi\left(v_t + \frac{1}{v_t}(m_t - \log \kappa)\right) - \kappa P(t, T) \Phi\left(\frac{1}{v_t}(m_t - \log \kappa)\right),
 \end{aligned}$$

其中

$$m_t = \frac{S-T}{S-t} \log P(t, S) + \sigma^2(S-T) \log \frac{S-t}{S-T}$$

和

$$\begin{aligned}
 v_t^2 &= \sigma^2(S-T)^2 \int_t^T \frac{1}{(S-s)^2} ds \\
 &= \sigma^2(S-T)^2 \left(\frac{1}{S-T} - \frac{1}{S-t} \right) \\
 &= \sigma^2(S-T) \frac{(T-t)}{(S-t)},
 \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}
 &P(t, T) \mathbb{E}_T \left[(P(T, S) - K)^+ \mid \mathcal{F}_t \right] \\
 &= P(t, T) (P(t, S))^{(S-T)(S-t)} \left(\frac{S-t}{S-T} \right)^{\sigma^2(S-T)} e^{v_t^2/2} \\
 &\quad \times \Phi \left(v_t + \frac{1}{v_t} \log \left(\frac{(P(t, S))^{(S-T)(S-t)}}{\kappa} \left(\frac{S-t}{S-T} \right)^{\sigma^2(S-T)} \right) \right) \\
 &\quad - \kappa P(t, T) \Phi \left(\frac{1}{v_t} \log \left(\frac{(P(t, S))^{(S-T)(S-t)}}{\kappa} \left(\frac{S-t}{S-T} \right)^{\sigma^2(S-T)} \right) \right).
 \end{aligned}$$

第8章

练习 8.1. 利用分解

$$P(t, T) = F_1(t, X_t) F_2(t, Y_t) \exp \left(- \int_t^T \varphi(s) ds + U(t, T) \right)$$

由(8.13)有,

$$dP(t, T) = P(t, T)r_t dt + \sigma C_1(t, T)dB_t^1 + \eta C_2(t, T)dB_t^2,$$

其中

$$C_1(t, T) = \frac{e^{-a(T-t)} - 1}{a} \quad \text{and} \quad C_2(t, T) = \frac{e^{-b(T-t)} - 1}{b}.$$

练习 8.2.

1. 我们有

$$\begin{aligned} dr_t &= -ar_0 e^{-at} dt + \varphi'(t)dt + dX_t \\ &= -ar_0 e^{-at} dt + \theta(t)dt - a \int_0^t \theta(u) e^{-a(t-u)} du dt - aX_t dt + \sigma dB_t \\ &= -ar_0 e^{-at} dt + \theta(t)dt - a\varphi(t)dt - aX_t dt + \sigma dB_t \\ &= (\theta(t) - ar_t)dt + \sigma dB_t. \end{aligned}$$

2. 由标准讨论我们得到

$$-xF(t, x) + (\theta(t) - ax)\frac{\partial F}{\partial x}(t, x) + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t, x) + \frac{\partial F}{\partial t}(t, x) = 0 \quad (13.3)$$

在终端条件 $F(T, x) = 1, x \in \mathbb{R}$ 下。

3. 我们有

$$\begin{aligned} P(t, T) &= \mathbb{E} \left[e^{-\int_t^T r_s ds} \mid \mathcal{F}_t \right] \\ &= \mathbb{E} \left[e^{-\int_t^T (r_0 e^{-as} + \varphi(s) + X_s) ds} \mid \mathcal{F}_t \right] \\ &= e^{-\int_t^T (r_0 e^{-as} + \varphi(s)) ds} \mathbb{E} \left[e^{-\int_t^T X_s ds} \mid \mathcal{F}_t \right] \\ &= e^{-\int_t^T (r_0 e^{-as} + \varphi(s)) ds} \exp \left(-\mathbb{E} \left[\int_t^T X_s ds \mid \mathcal{F}_t \right] + \frac{1}{2} \text{Var} \left[\int_t^T X_s ds \mid \mathcal{F}_t \right] \right) \\ &= e^{-\int_t^T (r_0 e^{-as} + \varphi(s)) ds} e^{-\frac{X_t}{a}(1 - e^{-a(T-t)}) + \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{a^2} \int_t^T (e^{-a(T-s)} - 1)^2 ds} \\ &= e^{A(t, T) + X_t C(t, T)}, \end{aligned}$$

其中

$$A(t, T) = -\int_t^T (r_0 e^{-as} + \varphi(s)) ds - \frac{X_t}{a}(1 - e^{-a(T-t)}),$$

和

$$C(t, T) = \frac{\sigma^2}{2a^2} \int_t^T (e^{-a(T-s)} - 1)^2 ds.$$

4. 我们有

$$f(t, T) = -\frac{\partial \log P(t, T)}{\partial T} = r_0 e^{-aT} + \varphi(T) + X_t e^{-a(T-t)} - \frac{\sigma^2}{2a^2} (1 - e^{-a(T-t)})^2, \\ 0 \leq t \leq T.$$

5. 我们有

$$d_t f(t, T) = aX_t e^{-a(T-t)} dt + e^{-a(T-t)} dX_t + \frac{\sigma^2}{a} e^{-a(T-t)} (1 - e^{-a(T-t)}) dt \\ = aX_t e^{-a(T-t)} dt + e^{-a(T-t)} (-aX_t + \sigma dB_t) + \frac{\sigma^2}{a} e^{-a(T-t)} (1 - e^{-a(T-t)}) dt \\ = e^{-a(T-t)} \sigma dB_t + \frac{\sigma^2}{a} e^{-a(T-t)} (1 - e^{-a(T-t)}) dt.$$

6. 我们有

$$\sigma^2 e^{-a(T-t)} \int_t^T e^{-a(T-s)} ds = \frac{\sigma^2}{a} e^{-a(T-t)} (1 - e^{-a(T-t)}).$$

7. 由于 $t = 0$, 只须设

$$\varphi(T) = -r_0 e^{-aT} + f^M(0, T) + \frac{\sigma^2}{2a^2} (1 - e^{-aT})^2, \quad T > 0,$$

就可得 $f(0, T) = f^M(0, T)$, $T > 0$.

8. 对等式

$$\varphi(T) = \int_0^T \theta(t) e^{-a(T-t)} dt = -r_0 e^{-aT} + f^M(0, T) + \frac{\sigma^2}{2a^2} (1 - e^{-aT})^2,$$

微分, $T > 0$, 可得

$$\theta(T) - a\varphi(T) = ar_0 e^{-aT} + \frac{\partial f^M}{\partial t}(0, T) + \frac{\sigma^2}{a} e^{-aT} (1 - e^{-aT}), \quad T > 0,$$

因此

$$\theta(t) = a\varphi(t) + ar_0 e^{-at} + \frac{\partial f^M}{\partial t}(0, t) + \frac{\sigma^2}{a} e^{-at} (1 - e^{-at}) \\ = af(0, t) + \frac{\partial f^M}{\partial t}(0, t) + \frac{\sigma^2}{2a} (1 - e^{-2at}) \\ = af^M(0, t) + \frac{\partial f^M}{\partial t}(0, t) + \frac{\sigma^2}{2a} (1 - e^{-2at}), \quad t > 0.$$

9. 由伊藤公式，偏微分方程(13.3)和鞅性 $t \mapsto e^{-\int_0^t r_s ds} P(t, T)$ 我们有

$$\begin{aligned} d\left(e^{-\int_0^t r_s ds} P(t, T)\right) &= d\left(e^{-\int_0^t r_s ds} F(t, r_t)\right) \\ &= \sigma e^{-\int_0^t r_s ds} \frac{\partial F}{\partial x}(t, r_t) dB_t \\ &= \sigma e^{-\int_0^t r_s ds} P(t, T) \frac{\partial \log F}{\partial x}(t, r_t) dB_t, \end{aligned}$$

因此

$$\zeta_t = \sigma \frac{\partial \log F}{\partial x}(t, r_t) = \sigma C(t, T),$$

并且 我们有

$$\begin{aligned} dP(t, T) &= e^{\int_0^t r_s ds} d\left(e^{-\int_0^t r_s ds} P(t, T)\right) + r_t P(t, T) dt \\ &= r_t P(t, T) dt + \zeta_t P(t, T) dB_t. \end{aligned}$$

10. 由问题 9 我们有

$$e^{\int_0^t r_s ds} P(t, T) = P(0, T) e^{\int_0^t \zeta_s dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t \zeta_s^2 ds},$$

因此

$$d\tilde{\mathbb{P}}/d\mathbb{P} = \mathbb{E} \left[\frac{d\tilde{\mathbb{P}}}{d\mathbb{P}} \mid \mathcal{F}_T \right] = \frac{1}{P(0, T)} e^{-\int_0^T r_s ds} = e^{\int_0^T \zeta_s dB_s - \frac{1}{2} \int_0^T \zeta_s^2 ds}.$$

11. 我们有

$$dr_t = (\theta(t) - ar_t) + \sigma dB_t = (\theta(t) - ar_t) + \sigma(\sigma C(t, T)dt + d\hat{B}_t)$$

其中 $\hat{B}_t$ 是一个在 $\tilde{P}$ 下的标准布朗运动

12. 我们有

$$d \frac{P(t, S)}{P(t, T)} = \frac{P(t, S)}{P(t, T)} (\zeta_t^S - \zeta_t^T) (dB_t - \zeta_t^T dt) = \frac{P(t, S)}{P(t, T)} (\zeta_t^S - \zeta_t^T) d\hat{B}_t,$$

$$0 \leq t \leq T.$$

13. 我们有

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[P(T, S) \mid \mathcal{F}_t \right] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\frac{P(T, S)}{P(T, T)} \mid \mathcal{F}_t \right] = \frac{P(t, S)}{P(t, T)}, \quad 0 \leq t \leq T \leq S,$$

因此

$$\begin{aligned} \frac{P(t, S)}{P(t, T)} &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[P(T, S) \mid \mathcal{F}_T \right] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[e^{A(T, S) + X_T C(T, S)} \mid \mathcal{F}_T \right] \\ &= e^{A(T, S) + C(T, S) \mathbb{E}[X_T | \mathcal{F}_t] + \frac{1}{2} |C(T, S)|^2 \text{Var}[X_T | \mathcal{F}_t]}, \end{aligned}$$

因此

$$A(T, S) + C(T, S) \mathbb{E}[X_T | \mathcal{F}_t] + \frac{1}{2} |C(T, S)|^2 \text{Var}[X_T | \mathcal{F}_t] = \log \frac{P(t, S)}{P(t, T)}.$$

14. 我们有

$$\begin{aligned} &P(t, T) \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[(K - P(T, S))^+ \mid \mathcal{F}_t \right] \\ &= P(t, T) \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[(K - P(T, S)) \mid \mathcal{F}_t \right] + P(t, T) \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[(P(T, S) - K)^+ \mid \mathcal{F}_t \right] \\ &= KP(t, T) - P(t, T) \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[P(T, S) \mid \mathcal{F}_t \right] + P(t, T) \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[(P(T, S) - K)^+ \mid \mathcal{F}_t \right] \\ &= KP(t, T) - P(t, S) + P(t, T) \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[(e^X - K)^+ \mid \mathcal{F}_t \right], \end{aligned}$$

其中 X 是一个在给定 $\mathcal{F}_t$ 下的中心高斯随机变量均值为

$$m_t = A(T, S) + C(T, S) \mathbb{E}[X_T | \mathcal{F}_t]$$

且方差为

$$v_t^2 = |C(T, S)|^2 \text{Var}[X_T | \mathcal{F}_t],$$

因此

$$\begin{aligned} &P(t, T) \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[(K - P(T, S))^+ \mid \mathcal{F}_t \right] \\ &= KP(t, T) - P(t, S) + P(t, T) \Phi \left(\frac{v_t}{2} + \frac{1}{v_t} (m_t + v_t^2/2 - \log K) \right) \\ &\quad - P(t, T) \Phi \left(-\frac{v_t}{2} + \frac{1}{v_t} (m_t + v_t^2/2 - \log K) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= KP(t, T) - P(t, S) + P(t, T) \Phi \left(\frac{v_t}{2} + \frac{1}{v_t} \log \frac{P(t, S)}{KP(t, T)} \right) \\
&\quad - P(t, T) \Phi \left(-\frac{v_t}{2} + \frac{1}{v_t} \log \frac{P(t, S)}{KP(t, T)} \right).
\end{aligned}$$

第9章

练习 9.1.

1. 我们有

$$L(t, T_1, T_2) = L(0, T_1, T_2) e^{\int_0^t \gamma_1(s) dB_s^2 - \frac{1}{2} \int_0^t |\gamma_1(s)|^2 ds}, \quad 0 \leq t \leq T_1,$$

且 $L(t, T_2, T_3) = b$, 因此 $P(t, T_2)/P(t, T_3) = 1 + \delta b$ 且有 $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}_3$ up to time T_2 , 而由 (9.21) 直到 T_1 为止 $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}_{1,2}$ 。

2. 我们有

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E} \left[e^{-\int_t^{T_2} r_s ds} (L(T_1, T_1, T_2) - \kappa)^+ \mid \mathcal{F}_t \right] \\
&= P(t, T_1) \mathbb{E}_2 \left[(L(T_1, T_1, T_2) - \kappa)^+ \mid \mathcal{F}_t \right] \\
&= P(t, T_1) \mathbb{E}_2 \left[(L(t, T_1, T_2) e^{\int_t^{T_1} \gamma_1(s) dB_s^2 - \frac{1}{2} \int_t^{T_1} |\gamma_1(s)|^2 ds} - \kappa)^+ \mid \mathcal{F}_t \right] \\
&= P(t, T_1) \text{Bl}(\kappa, L(t, T_1, T_2), \sigma_1(t), 0, T_1 - t),
\end{aligned}$$

其中

$$\sigma_1^2(t) = \frac{1}{T_1 - t} \int_t^{T_1} |\gamma_1(s)|^2 ds,$$

和

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left[e^{-\int_t^{T_3} r_s ds} (L(T_2, T_2, T_3) - \kappa)^+ \mid \mathcal{F}_t \right] &= P(t, T_2) \mathbb{E}_3 \left[(b - \kappa)^+ \mid \mathcal{F}_t \right] \\
&= P(t, T_2) (b - \kappa)^+.
\end{aligned}$$

3. 我们有

$$\frac{P(t, T_1)}{P(t, T_1, T_3)} = \frac{P(t, T_1)}{\delta P(t, T_2) + \delta P(t, T_3)}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{P(t, T_1)}{\delta P(t, T_2)} \frac{1}{1 + P(t, T_3)/P(t, T_2)} \\
 &= \frac{1 + \delta b}{\delta(\delta b + 2)} (1 + \delta L(t, T_1, T_2)), \quad 0 \leq t \leq T_1,
 \end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned}
 \frac{P(t, T_3)}{P(t, T_1, T_3)} &= \frac{P(t, T_3)}{P(t, T_2) + P(t, T_3)} \\
 &= \frac{1}{1 + P(t, T_2)/P(t, T_3)} \\
 &= \frac{1}{\delta} \frac{1}{\delta b + 2}, \quad 0 \leq t \leq T_2. \quad (13.4)
 \end{aligned}$$

4. 我们有

$$\begin{aligned}
 S(t, T_1, T_3) &= \frac{P(t, T_1)}{P(t, T_1, T_3)} - \frac{P(t, T_3)}{P(t, T_1, T_3)} \\
 &= \frac{1 + \delta b}{\delta(2 + \delta b)} (1 + \delta L(t, T_1, T_2)) - \frac{1}{\delta(2 + \delta b)} \\
 &= \frac{1}{2 + \delta b} (b + (1 + \delta b)L(t, T_1, T_2)), \quad 0 \leq t \leq T_2,
 \end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned}
 dS(t, T_1, T_3) &= \frac{1 + \delta b}{2 + \delta b} L(t, T_1, T_2) \gamma_1(t) dB_t^2 \\
 &= \left(S(t, T_1, T_3) - \frac{b}{2 + \delta b} \right) \gamma_1(t) dB_t^2 \\
 &= S(t, T_1, T_3) \sigma_{1,3}(t) dB_t^2,
 \end{aligned}$$

$0 \leq t \leq T_2$, 有

$$\begin{aligned}
 \sigma_{1,3}(t) &= \left(1 - \frac{b}{S(t, T_1, T_3)(2 + \delta b)} \right) \gamma_1(t) \\
 &= \left(1 - \frac{b}{b + (1 + \delta b)L(t, T_1, T_2)} \right) \gamma_1(t) \\
 &= \frac{(1 + \delta b)L(t, T_1, T_2)}{b + (1 + \delta b)L(t, T_1, T_2)} \gamma_1(t) \\
 &= \frac{(1 + \delta b)L(t, T_1, T_2)}{(2 + \delta b)S(t, T_1, T_2)} \gamma_1(t).
 \end{aligned}$$

练习 9.2.

1. 我们有

$$L(t, T_1, T_2) = L(0, T_1, T_2)e^{\gamma B_t^2 - \gamma^2 t/2}, \quad 0 \leq t \leq T_1.$$

2. 我们有

$$\begin{aligned} & P(t, T_2) \mathbb{E}_2 [(L(T_1, T_1, T_2) - \kappa)^+ | \mathcal{F}_t] \\ &= P(t, T_2) \text{Bl}(\kappa, L(t, T_1, T_2), \gamma, 0, T_1 - t), \quad 0 \leq t \leq T_1. \end{aligned}$$

练习 9.3.

1. 我们有

$$\begin{aligned} L(T, T_1, T_2) &= S(T, T_1, T_2) \\ &= \frac{1}{T_2 - T_1} \left(\frac{P(T, T_1)}{P(T, T_2)} - 1 \right) \\ &= \frac{1}{T_2 - T_1} \left(\frac{P(t, T_1)}{P(t, T_2)} \exp \left(\int_t^T (\zeta_s^1 - \zeta_s^2) dB_s - \frac{1}{2} \int_t^T ((\zeta_s^1)^2 - (\zeta_s^2)^2) ds \right) - 1 \right) \\ &= \frac{1}{T_2 - T_1} \left(\frac{P(t, T_1)}{P(t, T_2)} \exp \left(\int_t^T (\zeta_s^1 - \zeta_s^2) dB_s^2 - \frac{1}{2} \int_t^T (\zeta_s^1 - \zeta_s^2)^2 ds \right) - 1 \right) \\ &= \frac{1}{T_2 - T_1} \left(\frac{P(t, T_1)}{P(t, T_2)} \exp \left(\int_t^T (\zeta_s^1 - \zeta_s^2) dB_s^1 + \frac{1}{2} \int_t^T (\zeta_s^1 - \zeta_s^2)^2 ds \right) - 1 \right), \end{aligned}$$

并由伊藤计算,

$$\begin{aligned} dS(t, T_1, T_2) &= \frac{1}{T_2 - T_1} d \left(\frac{P(t, T_1)}{P(t, T_2)} \right) \\ &= \frac{1}{T_2 - T_1} \frac{P(t, T_1)}{P(t, T_2)} \left((\zeta_t^1 - \zeta_t^2) dB_t + \frac{1}{2} (\zeta_t^1 - \zeta_t^2)^2 dt - \frac{1}{2} ((\zeta_t^1)^2 - (\zeta_t^2)^2) dt \right) \\ &= \left(\frac{1}{T_2 - T_1} + S(t, T_1, T_2) \right) ((\zeta_t^1 - \zeta_t^2) dB_t + \zeta_t^2 (\zeta_t^2 - \zeta_t^1) dt) \\ &= \left(\frac{1}{T_2 - T_1} + S(t, T_1, T_2) \right) ((\zeta_t^1 - \zeta_t^2) dB_t^1 + ((\zeta_t^2)^2 - (\zeta_t^1)^2) dt) \end{aligned}$$

$$= \left(\frac{1}{T_2 - T_1} + S(t, T_1, T_2) \right) (\zeta_t^1 - \zeta_t^2) dB_t^2, \quad t \in [0, T_1],$$

因此 $\frac{1}{T_2 - T_1} + S(t, T_1, T_2)$ 是一个几何布朗运动, 且有

$$\begin{aligned} & \frac{1}{T_2 - T_1} + S(T, T_1, T_2) \\ &= \left(\frac{1}{T_2 - T_1} + S(t, T_1, T_2) \right) \exp \left(\int_t^T (\zeta_s^1 - \zeta_s^2) dB_s^2 - \frac{1}{2} \int_t^T (\zeta_s^1 - \zeta_s^2)^2 ds \right), \\ & 0 \leq t \leq T \leq T_1. \end{aligned}$$

2. 我们有

$$\begin{aligned} & (T_2 - T_1) \mathbb{E} \left[e^{-\int_t^{T_2} r_s ds} (L(T_1, T_1, T_2) - \kappa)^+ \mid \mathcal{F}_t \right] \\ &= (T_2 - T_1) \mathbb{E} \left[e^{-\int_t^{T_1} r_s ds} P(T_1, T_2) (L(T_1, T_1, T_2) - \kappa)^+ \mid \mathcal{F}_t \right] \\ &= P(t, T_1, T_2) \mathbb{E}_{1,2} \left[(S(T_1, T_1, T_2) - \kappa)^+ \mid \mathcal{F}_t \right]. \end{aligned}$$

由于 $(B_t^2)_{t \in [0, T_1]}$ 是一个直到 T_1 为止的在 $\mathbb{P}_{1,2}$ 下的标准布朗运动

$$\begin{aligned} L(T, T_1, T_2) &= S(T, T_1, T_2) \\ &= -\frac{1}{T_2 - T_1} \\ &\quad + \left(\frac{1}{T_2 - T_1} + S(t, T_1, T_2) \right) \exp \left(\int_t^T (\zeta_s^1 - \zeta_s^2) dB_s^2 - \frac{1}{2} \int_t^T (\zeta_s^1 - \zeta_s^2)^2 ds \right), \end{aligned}$$

具有相同的分布

$$\frac{1}{T_2 - T_1} \left(\frac{P(t, T_1)}{P(t, T_2)} e^{X - \frac{1}{2} \text{Var}[X]} - 1 \right),$$

其中 X 是给定 $\mathcal{F}_t$ 时在 $\mathbb{P}_2$ 下的中心高斯随机变量, 方差为

$$\int_t^{T_1} (\zeta_s^1 - \zeta_s^2)^2 ds.$$

因此

$$\begin{aligned} & (T_2 - T_1) \mathbb{E} \left[e^{-\int_t^{T_2} r_s ds} (L(T_1, T_1, T_2) - \kappa)^+ \mid \mathcal{F}_t \right] \\ &= P(t, T_1, T_2) \\ &\quad \times \text{Bl} \left(\frac{1}{T_2 - T_1} + S(t, T_1, T_2), \frac{\int_t^{T_1} (\zeta_s^1 - \zeta_s^2)^2 ds}{T_1 - t}, \kappa + \frac{1}{T_2 - T_1}, T_1 - t \right). \end{aligned}$$

第10章

练习 10.1. 由关系式 (9.17) 和上述的 (13.4) 我们有 直到 T_1 , $\mathbb{P}_3 = \mathbb{P}_{1,3}$ 因此 $(B^3)_{t \in [0, T_1]}$ 是一个在 $\mathbb{P}_{1,3}$ 下的标准布朗运动且

$$\begin{aligned} P(t, T_1, T_3) \mathbb{E}_{1,3} [(S(T_1, T_1, T_3) - \kappa)^+ | \mathcal{F}_t] \\ = \text{Bl}(\kappa, S(t, T_1, T_2), \tilde{\sigma}_{1,3}(t), 0, T_1 - t), \quad 0 \leq t \leq T_1, \end{aligned}$$

其中 $\tilde{\sigma}_{1,3}(t)$ 是一个通过在时刻 t 冻结 $\sigma_{1,3}(s)$ 的随机因素得到的渐近波动率, 即

$$\begin{aligned} |\tilde{\sigma}_{1,3}|^2(t) &= \frac{1}{T_1 - t} \left| \frac{(1 + \delta b)L(t, T_1, T_2)}{b + (1 + \delta b)L(t, T_1, T_2)} \right|^2 \int_t^{T_1} |\gamma_1(s)|^2 ds \\ &= \frac{1}{T_1 - t} \frac{(1 + \delta b)^2 L^2(t, T_1, T_2)}{(2 + \delta b)^2 S^2(t, T_1, T_2)} \int_t^{T_1} |\gamma_1(s)|^2 ds. \end{aligned}$$

练习 10.2.

1. 我们有

$$P(t, T_1) = P(t, T_2)(1 + \delta L(t, T_1, T_2)), \quad 0 \leq t \leq T_1,$$

因此

$$\begin{aligned} dP(t, T_1) &= P(t, T_2)\delta dL(t, T_1, T_2) + (1 + \delta L(t, T_1, T_2))dP(t, T_2) \\ &= P(t, T_2)\delta\gamma L(t, T_1, T_2)dB_t^2 \\ &\quad + (1 + \delta L(t, T_1, T_2))P(t, T_2)(r_t dt + \zeta_2(t)dB_t) \\ &= P(t, T_2)\delta\gamma L(t, T_1, T_2)(dB_t - \zeta_2(t)dt) \\ &\quad + (1 + \delta L(t, T_1, T_2))P(t, T_2)(r_t dt + \zeta_2(t)dB_t) \\ &= P(t, T_2)(\delta\gamma L(t, T_1, T_2) + \zeta_2(t)(1 + \delta L(t, T_1, T_2)))dB_t \\ &\quad - \zeta_2(t)P(t, T_2)\delta\gamma L(t, T_1, T_2)dt + P(t, T_2)(1 + \delta L(t, T_1, T_2))r_t dt \\ &= \frac{P(t, T_1)}{1 + \delta L(t, T_1, T_2)}(\delta\gamma L(t, T_1, T_2) + \zeta_2(t)(1 + \delta L(t, T_1, T_2)))dB_t \\ &\quad - \zeta_2(t)P(t, T_2)\delta\gamma L(t, T_1, T_2)dt + P(t, T_2)(1 + \delta L(t, T_1, T_2))r_t dt \end{aligned}$$

$$= P(t, T_1) \left(\gamma - \frac{\gamma}{1 + \delta L(t, T_1, T_2)} + \zeta_2(t) \right) dB_t \\ - \zeta_2(t) P(t, T_2) \delta \gamma L(t, T_1, T_2) dt + P(t, T_2) (1 + \delta L(t, T_1, T_2)) r_t dt,$$

因此 $0 \leq t \leq T_1$,

$$\zeta_1(t) = \frac{\delta \gamma L(t, T_1, T_2)}{1 + \delta L(t, T_1, T_2)} + \zeta_2(t).$$

2. 我们有

$$\frac{dL(t, T_1, T_2)}{L(t, T_1, T_2)} = \gamma dB_t^2 = \gamma dB_t - \gamma \zeta_2(t) dt, \quad 0 \leq t \leq T_1, \quad (13.5)$$

3. Assuming that

$$\frac{dL(s, T_1, T_2)}{L(s, T_1, T_2)} = \gamma dB_s - \gamma \zeta_2(t) ds, \quad t \leq s \leq T_1.$$

可得到

$$L(s, T_1, T_2) = L(t, T_1, T_2) e^{\gamma(B_s - B_t) - \gamma^2(s-t)/2 - \gamma \zeta_2(t)(s-t)}, \quad 0 \leq t \leq s.$$

另一方面由于 $\zeta_1 = 0$, 我们有 $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}$, 因此 $(B_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ 是一个在 $\mathbb{P}_1$ 下的标准布朗运动且

$$P(t, T_1) \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[(P(T_1, T_2) - K)^+ \mid \mathcal{F}_t \right] \\ = P(t, T_1) \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[(P(T_1, T_2) - K)^+ \mid \mathcal{F}_t \right] \\ = P(t, T_1) \\ \times \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[((1 + \delta L(t, T_1, T_2) e^{\gamma(B_{T_1} - B_t) - \gamma^2(T_1 - t)/2 - \gamma \zeta_2(t)(T_1 - t)})^{-1} - K)^+ \mid \mathcal{F}_t \right] \\ = P(t, T_1) \int_{-\infty}^{\infty} ((1 + \delta L(t, T_1, T_2) e^{\gamma x - \gamma^2(T_1 - t)/2 - \gamma \zeta_2(t)(T_1 - t)})^{-1} - K)^+ \\ \frac{e^{-x^2/(2(T_1 - t))}}{\sqrt{2(T_1 - t)\pi}} dx.$$

参考文献

- [ABR05] L. Andersen and R. Brotherton-Ratcliffe. Extended LIBOR market models with stochastic volatility. *Journal of Computational Finance*, 9(1), 2005. 150
- [Bas日] L. Bass. Brave new world for the equities-shy. 星期日南华早报 p. 20, 2007 十月七日. 43
- [BGM97] A. Brace, D. Gatarek, and M. Musiela. The market model of interest rate dynamics. *Math. Finance*, 7(2):127–155, 1997. 127
- [Bjö04] T. Björk. On the geometry of interest rate models. In *Paris-Princeton Lectures on Mathematical Finance 2003*, volume 1847 of *Lecture Notes in Math.*, pages 133–215. Springer, Berlin, 2004. 4, 65, 91, 149
- [BM06] D. Brigo and F. Mercurio. *Interest rate models—theory and practice*. Springer Finance. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 2006. 4, 31, 42, 83, 97
- [Chu02] K.L. Chung. *Green, Brown, and probability & Brownian motion on the line*. World Scientific Publishing Co. Inc., River Edge, NJ, 2002. 146
- [CIR85] J.C. Cox, J.E. Ingersoll, and S.A. Ross. A theory of the term structure of interest rates. *Econometrica*, 53:385–407, 1985. 31
- [CT06] R. A. Carmona and M. R. Tehranchi. *Interest rate models: an infinite dimensional stochastic analysis perspective*. Springer Finance. Springer-Verlag, Berlin, 2006. 4, 31, 149
- [DDP05] M. De Donno and M. Pratelli. A theory of stochastic integration for bond markets. *Ann. Appl. Probab.*, 15(4):2773–2791, 2005. 149
- [DFM09] J. Da Fonseca and M. Messaoud. LIBOR market in Premia: Bermudan pricer, stochastic volatility and Malliavin calculus. *Bankers, Markets & Investors*, 99:44–57, 2009. 151

-
- [Dot78] L.U. Dothan. On the term structure of interest rates. *Jour. of Fin. Ec.*, 6:59–69, 1978. [32](#)
- [DP04] G. Da Prato. *Kolmogorov equations for stochastic PDEs*. Advanced Courses in Mathematics. CRM Barcelona. Birkhäuser Verlag, Basel, 2004. [149](#)
- [EÖ05] E. Eberlein and F. Özkan. The Lévy LIBOR model. *Finance and Stochastics*, 9:327–348, 2005. [150](#)
- [ET05] I. Ekeland and E. Taflin. A theory of bond portfolios. *Ann. Appl. Probab.*, 15(2):1260–1305, 2005. [149](#)
- [FLL⁺99] E. Fournié, J.M. Lasry, J. Lebuchoux, P.-L. Lions, and N. Touzi. Applications of Malliavin calculus to Monte Carlo methods in finance. *Finance and Stochastics*, 3(4):391–412, 1999. [151](#)
- [FT04] D. Filipović and J. Teichmann. On the geometry of the term structure of interest rates. *Proc. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.*, 460(2041):129–167, 2004. [149](#)
- [GK03] P. Glasserman and S.G. Kou. The term structure of simple forward rates with jump risk. *Math. Finance*, 13(3):383–410, 2003. [150](#)
- [GS03] C. Gouriéroux and R. Sufana. Wishart quadratic term structure models. Working paper, 2003. [150](#)
- [HJM92] D. Heath, R. Jarrow, and A. Morton. Bond pricing and the term structure of interest rates: a new methodology. *Econometrica*, 60:77–105, 1992. [59](#), [69](#)
- [HW90] J. Hull and A. White. Pricing interest rate derivative securities. *The Review of Financial Studies*, 3:537–592, 1990. [72](#)
- [IW89] N. Ikeda and S. Watanabe. *Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes*. North-Holland, 1989. [4](#)
- [JP00] J. Jacod and P. Protter. *Probability essentials*. Springer-Verlag, Berlin, 2000. [141](#), [143](#)

- [JW01] J. James and N. Webber. *Interest rate modelling*, volume XVIII of *Wileys Series in Financial Engineering*. Cambridge University Press, 2001. 4, 31, 32, 150
- [Kij03] M. Kijima. *Stochastic processes with applications to finance*. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2003. 5, 31
- [Mal97] P. Malliavin. *Stochastic analysis*, volume 313 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften*. Springer-Verlag, Berlin, 1997. 151
- [Mik98] T. Mikosch. *Elementary stochastic calculus—with finance in view*, volume 6 of *Advanced Series on Statistical Science & Applied Probability*. World Scientific Publishing Co. Inc., River Edge, NJ, 1998. 19
- [MP01] Moshe A. Milevsky and S. David Promislow. Mortality derivatives and the option to annuitise. *Insurance Math. Econom.*, 29(3):299–318, 2001. 4th IME Conference (Barcelona, 2000). 151
- [MT06] P. Malliavin and A. Thalmaier. *Stochastic calculus of variations in mathematical finance*. Springer Finance. Springer-Verlag, Berlin, 2006. 151
- [Øks03] B. Øksendal. *Stochastic differential equations*. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, sixth edition, 2003. 5, 19
- [Pit04] V. Piterbarg. A stochastic volatility forward LIBOR model with a term structure of volatility smiles. Preprint, 2004. 150
- [PP11] C. Pintoux and N. Privault. The Dothan pricing model revisited. *Math. Finance*, 21:355–363, 2011. 32
- [Pra08] M. Pratelli. Generalizations of Merton’s mutual fund theorems in infinite-dimensional financial models. In R. Dalang, M. Dozzi, and F. Russo, editors, *Seminar on Stochastic Analysis, Random Fields and Applications (Ascona, 2005)*, volume 59 of *Progress in Probability*, pages 511–524. Birkhäuser, 2008. 149

-
- [Pro01] P. Protter. A partial introduction to financial asset pricing theory. *Stochastic Process. Appl.*, 91(2):169–203, 2001. [26](#)
- [Pro05] P. Protter. *Stochastic integration and differential equations*, volume 21 of *Stochastic Modelling and Applied Probability*. Springer-Verlag, Berlin, 2005. [1](#), [10](#), [12](#), [22](#), [26](#), [37](#), [39](#), [79](#), [141](#)
- [PW09] N. Privault and X. Wei. Calibration of the LIBOR market model - implementation in PREMIA. *Bankers, Markets & Investors*, 99:20–28, 2009. [137](#)
- [Reb96] R. Rebonato. *Interest-Rate Option Models*. John Wiley & Sons, 1996. [31](#), [137](#)
- [Sch02] J. Schoenmakers. Calibration of LIBOR models to caps and swaptions: a way around intrinsic instabilities via parsimonious structures and a collateral market criterion. WIAS Preprint No 740, Berlin, 2002. [137](#)
- [Sch05] J. Schoenmakers. *Robust LIBOR modelling and pricing of derivative products*. Chapman & Hall/CRC Financial Mathematics Series. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2005. [4](#), [121](#), [127](#), [134](#), [135](#)
- [Vaš77] O. Vašíček. An equilibrium characterisation of the term structure. *Journal of Financial Economics*, 5:177–188, 1977. [31](#), [40](#), [42](#)
- [WZ06] L. Wu and F. Zhang. LIBOR market model with stochastic volatility. *Journal of Industrial and Management Optimization*, 2(2):199–227, 2006. [150](#)
- [Yol05] Y. Yolcu. One-factor interest rate models: analytic solutions and approximations. Master Thesis, Middle East Technical University, 2005. [31](#)

索引

- BGM 模型, 127
- Black-Scholes
 - 公式, 18, 128
 - 偏微分方程, 17
- CEV 模型, 32
- CIR model, 31
- Gauss分布, 18
- Girsanov定理, 20
- HJM
 - model, 65
 - 条件, 69
- Hull-White 模型, 72
- LIBOR
 - 率, 114
 - 模型, 113
 - 市场, 113
- Musiela 记号, 55
- Nelson-Siegel, 55
- Svensson 参数化, 56
- Vasicek 模型, 31
- 德尔塔, 17
- 短期利率, 54
- 对冲策略, 24
- 二元模型, 95
- 风险中性概率, 21
- 高斯
 - 随机变量, 141
 - 向量, 142
- 互换, 111
- 互换测度, 117
- 互换率, 115
- 互换期权, 122, 131
- 简单可料过程, 3
- 界定, 135
- 可测的, 140
- 可料表达, 23, 25
- 利率, 106
- 利率上限定价, 130
- 利率上限期权, 111
- 马氏
 - 过程, 144
- 马氏性, 37
- 年计数器, 109
- 平方变差, 8
- 期权, 14
- 期限结构, 105
- 曲线拟合, 88
- 确定漂移项, 91
- 适应过程, 2
- 瞬时远期利率, 51

随机微分方程, 11
损益函数, 14

条件期望, 142

投资组合, 16
投资组合自融资, 16

无风险资产, 16
无套利, 36

相关系数, 141
相关性问题的, 92

协方差, 140
信息流, 1

伊藤对偶式, 4
伊藤公式, 10
伊藤随机积分, 4

远期
 测度, 74
远期利率, 49

债券定价偏微分方程, 96

鞅
 离散时间, 143
 连续时间, 144

