习题 **4,** 第二组

10. 设 $f \in L([a,b])$, $\{I_k\}$ 是 $[a,b]$ 内的开区间列, $\lambda > 0$, 若有

$$\int_{I_k} |f(x)|dx \le \lambda |I_k| \quad (k = 1, 2, \dots),$$

记 $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$, 试证明 $\int_E |f(x)|dx \le 2\lambda(E)$.

Proof. 因为 E 是开集, 可以分解为不相交的开区间的并, 我们可以不失一般性地对单个开区间证明结论, 即假设 $E = (a_0, b_0)$.

我们首先考察最端点为 a_0 的那些开区间 I_k, 选最长的一个, 假定是 $I_1 = (a_0, b_0)$. 然后, 我们选取盖住 b_0 的且右端点最大的区间, 设为 $I_2 = (a_1, b_1)$. 然后选取盖住 b_1 的且右端点最大的区间, 设为 $I_3 = (a_2, b_2)$. 此时必有 $I_3 \cap I_1 = \emptyset$. 若不然, I_3 就能盖住 b_0 而且 I_3 的右端点 b_2 比 b_1 更靠右, 与 I_2 的取法矛盾.

如此继续取 I_4, I_5, ... 我们可知任何点 $x \in (a_0, b_0)$ 只会出现在最多两个开区间 I_k 内, 所以

$$\sum_k \chi_{I_k}(x) \le 2\chi_E(x).$$

两边积分便得

$$\sum_k |I_k| \le 2m(E).$$

于是,

$$\int_E |f(x)|dx \le \sum_k \int_{I_k} |f(x)|dx \le \lambda \sum_k |I_k| \le 2\lambda m(E).$$ □

13. $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的周期为 $T > 0$ 的可测函数, 且 $A = \int_0^T |f(x)|dx < \infty$, 试证明

$$\lim_{n\to\infty} n^{-2} f(nx) = 0, \text{ a.e. } x \in \mathbb{R}.$$

Proof. 考虑

$$\frac{1}{n^2}\int_0^T |f(nx)|dx = \frac{1}{n^3}\int_0^{nT} |f(x)|dx = \frac{1}{n^3} nA = \frac{A}{n^2}$$

所以 (根据 Tonelli 定理)

$$\int_0^T \left(\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}|f(nx)|\right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A}{n^2}$$

存在. 这就意味着

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}|f(nx)|$$

几乎处处收敛, 即得结论. □

14. 试证明

$$\lim_{n\to\infty} |\cos nx|^{1/n} = 1, \text{ a.e. } x \in \mathbb{R}.$$

Proof. 令

$$f(x) = \begin{cases} \ln^2 |\cos x|, & x \notin \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}; \\ 0, & x \in \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}. \end{cases}$$

那么 f 的周期为 π, 且在 $\pi/2$ 附近, $f(x) \approx \ln^2 |\pi/2 - x|$ 是可积的, 根据第 13 题的结果可得

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\ln|\cos nx|}{n}\right)^2 = 0 \quad \text{a.e. } x \in \mathbb{R}.$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln|\cos nx|}{n}=0\quad \text{a.e. } x\in\mathbb{R},$$

即得结论. □

19. 设

$$\int_0^1 |f(x)|dx<\infty,\quad \int_1^\infty |f(x)|x^{-2}dx<\infty,$$

试证明

$$\int_0^\infty \sin ax dx\int_a^\infty f(y)e^{-xy}dy=a\int_a^\infty \frac{f(y)}{a^2+y^2}dy.$$

Proof. 易见结论可由 Fubini 定理交换积分顺序得到. 为了应用 Fubini 定理, 我们验证

$$\int_0^\infty\int_a^\infty |f(y)|\,|\sin(ax)|e^{-xy}dydx<\infty. \tag{1}$$

当 $x\le 1/a$ 时, 应用 $|\sin(ax)|e^{-xy}\le axe^{-xy}$, 及 Tonelli 定理可得

$$\begin{aligned}\int_0^{1/a}\int_a^\infty |f(y)|\,|\sin(ax)|e^{-xy}dydx &\le \int_a^\infty |f(y)|\int_0^{1/a} axe^{-xy}dx\\ &=a\int_a^\infty |f(y)|\frac{1-e^{-y/a}(1+y/a)}{y^2}dy\\ &=\frac{1}{a}\int_a^\infty |f(y)|\frac{1-e^{-y/a}(1+y/a)}{y^2/a^2}dy\\ &\le \frac{1}{a}\int_a^\infty |f(y)|\min\left\{\frac{1}{2},\frac{a^2}{y^2}\right\}dy\\ &<\infty,\end{aligned}$$

其中第二个不等式是因为 $(1-e^{-t}(1+t))/t^2$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调下降且在 $t=0^+$ 处的值为 $1/2$.
当 $x\ge 1/a$ 时, 应用 $|\sin(ax)|e^{-xy}\le e^{-xy}$ 及 Tonelli 定理可得

$$\begin{aligned}\int_{1/a}^\infty\int_a^\infty |f(y)|\,|\sin(ax)|e^{-xy}dydx &\le \int_a^\infty |f(y)|\int_{1/a}^\infty e^{-xy}dx\\ &=\int_a^\infty |f(y)|\frac{e^{-y/a}}{y}dy\\ &\le \int_a^\infty |f(y)|\min\left\{\frac{1}{a},\frac{a}{ey^2}\right\}dy\\ &<\infty.\end{aligned}$$

其中第二个不等式是因为 $e^{-y/a}\le a/(ey)$ 对于 $y\ge a$ 成立.
结合以上两种情形可知(1)成立. □

20. 记数列 $\{t_n\}$ 使极限 $\lim\limits_{n\to\infty} e^{it_nx}$ 存在的 $x\in\mathbb{R}$ 的全体为 E, 且 $m(E)>0$, 试证明 $\{t_n\}$ 是收敛列.

Proof. 因为 $m(E)>0$, 根据定理 2.20 (Steinhaus), $E-E$ 包含一开区间 $(-a,a)$. 容易看出极限 $\lim_n e^{it_n\lambda}$ 对所有的 $\lambda\in(-a,a)$ 都存在; 因为可以将 λ 写作 $\lambda=x-y$, 其中 $t,s\in E$, 那么 $\lim_n e^{it_n\lambda}=\lim_n e^{it_nx}\overline{\lim_n e^{it_ny}}$. 那么如果 $\lim_n e^{it_nx}$ 对某个 $x=x_0$ 存在, 那么 $\lim_n e^{it_nx}$ 就对 $x\in(x_0-a,x_0+a)$ 存在. 这样便可以知道, 极限 $\lim_n e^{it_nx}$ 对所有的 $x\in\mathbb{R}$ 都存在.
设 $f(x)=\lim_{n\to\infty}e^{it_nx}$, 则 $|f(x)|=1$. 必定存在 $a<b$ 使得

$$\int_a^b f(x)dx\neq 0.$$

否则, f 在任何区间上的积分都为 0, 可得 $f(x)=0$ a.e., 与 $|f(x)|=1$ 矛盾. 考虑数列

$$c_n=\int_a^b e^{it_nx}dx=\frac{i(e^{it_na}-e^{it_nb})}{t_n}.$$

根据 Lebesgue 控制收敛定理, 有 $c_n\to\int_a^b f(x)dx\neq 0$. 这说明了 $\{t_n\}$ 必定有界. 类似地, 根据 c_n 的表达式, 我们也可以知道 t_n 不能存在两个子列分别收敛于不同的极限, 否则会出现 $c_n\to i(f(a)-f(b))/L_1$ 和 $c_n\to i(f(a)-f(b))/L_2$ 这种矛盾的状况, 这里 L_1,L_2 分别为两个子列的极限. 因此 $\{t_n\}$ 极限存在. $\square$