本章中, 对 $L^p(E)$ 如果未指明 $p>0$, 一律认为 $p\geq 1$.

§6.1, L^p 空间的定义与不等式, 思考题, page 290, 293, 295

1. 设 $0<m(E)<\infty$, 且有数列 $\{p_k\}$:

$$1<p_1<p_2<\cdots<p_k<\cdots\to\infty\quad(k\to\infty)$$

若 $f\in L^{p_k}(E)(k=1,2,\dots)$ 且 $\sup\limits_{k\geq 1}\{\|f\|_{p_k}\}<\infty$, 则 $f\in L^{\infty}(E)$.

Proof 设 $\sup\limits_{k\geq 1}\{\|f\|_{p_k}\}=M$. 对于任意的 $\varepsilon>0$, 设 $A_\varepsilon=\{x\in E:|f(x)|>M+\varepsilon\}$, 则 $m(A_\varepsilon)<\infty$. $\|f\|_{p_k}\geq(M+\varepsilon)m(A_\varepsilon)^{1/p_k}$. 又 $\|f\|_{p_k}\leq M$, 所以 $M\geq(M+\varepsilon)m(A_\varepsilon)^{1/p_k}$. 这对任意的 k 都成立, 如果 $m(A_\varepsilon)>0$, 令 $k\to\infty$, 得 $M\geq M+\varepsilon$ 这是一个矛盾. 所以 $M(A_\varepsilon)=0$ 对任意的 $\varepsilon>0$ 成立, 因此 $\{x\in E:|f(x)|>M\}=\bigcup\limits_n A_{1/n}$ 是零测集. $f\in L^{\infty}(E)$.

2. 设 $0<p<q$, 如果 $f\in L^{\infty}(E)\cap L^p(E)$ 则 $f\in L^q(E)$.

Proof 设 $|f(x)|\leq M$ a.e. $x\in E$ 又 $|f(x)|^q=|f(x)|^{q-p}|f(x)|^p\leq M^{q-p}|f(x)|^p$ a.e. 所以

$$\int_E|f(x)|^q dx\leq M^{q-p}\int_E|f(x)|^p dx<\infty,$$

$f\in L^q(E)$.

3. 设 $m(E)<\infty$, $f(x)$ 是 E 上的可测函数, $0<p_0<+\infty$, 则

$$\lim_{p\nearrow p_0}\int_E|f(x)|^p dx=\int_E|f(x)|^{p_0}dx.$$

Proof 设 $E=E_1\cup E_2=E[|f|\geq 1]\cup E[|f|<1]$. 在 E_1 上, $\{|f(x)|^{p_k}\}$ 是非负渐升列, 根据 Levi 非负渐升列定理, 成立

$$\lim_{k\to\infty}\int_{E_1}|f(x)|^{p_k}dx=\int_{E_1}|f(x)|^{p_0}dx.$$

对于任意的 $x\in E_2$ 和 $p>0$ 都成立, 又 $m(E_2)<\infty$, 再根据 Lebesgue 控制收敛定理,

$$\lim_{k\to\infty}\int_{E_2}|f(x)|^{p_k}dx=\int_{E_2}|f(x)|^{p_0}dx.$$

结合这两个式子就得到

$$\lim_{k\to\infty}\int_{E}|f(x)|^{p_k}dx=\int_{E}|f(x)|^{p_0}dx.$$

根据 Heine 原理, 就得到所求证的式子.

4. 设 $f\in L^1(E)\cap L^2(E)$, 则

$$\lim_{p\searrow 1}\int_E|f(x)|^p dx=\int_E|f(x)|dx.$$

Proof 设 $E=E_1\cup E_2=E[|f|\geq 1]\cup E[|f|<1]$. $|f(x)|^p\leq|f(x)|^2(x\in E_1)$ 对于 $1<p<2$ 都成立, 于是对于任意的一列单调下降的 $p_k\to 1$, $|f(x)|^{p_k}\to|f(x)|(x\in E_1)$. 因为 $f\in L^2(E_1)$, 根据 Lebesgue 收敛收敛定理,

$$\lim_{k\to\infty}\int_{E_1}|f(x)|^{p_k}dx=\int_{E_1}|f(x)|dx.$$

根据 Heine 原理,

$$\lim_{p\to 1^+}\int_{E_2}|f(x)|^p dx=\int_{E_1}|f(x)|dx.$$

类似的, 利用 $f\in L^1(E_2)$ 可以证明

$$\lim_{p\to 1^+}\int_{E_2}|f(x)|^p dx=\int_{E_2}|f(x)|dx.$$

于是所求证的式子成立.

5. 设 $f(x), g(x)$ 是 E 上的可测函数, 且有

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{r}, \quad 1 \leq p<\infty,$$

试证明 $\|fg\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$.

Proof 作 $F=|f|^r$ 和 $G=|g|^r$. 则 $\|fg\|_r=\|FG\|_1^r$,

$$\|f\|_p=\left(\int_E |f|^p dx\right)^{1/p}=\left(\int_E |F|^{p/r} dx\right)^{1/p}=\|F\|_{p/r}^r,$$

同样 $\|g\|_q=\|G\|_{q/r}^r$. 因为 p/r 和 q/r 是共轭指标, 由 Hölder 不等式, $\|FG\|_1 \leq \|F\|_{p/r}+\|G\|_{q/r}$ 成立, 由此容易知道 $\|fg\|_r \leq \|f\|_p\|g\|_q$ 成立.

6. 设 $f \in L^2((0,\infty))$ 且 $f(x) \geq 0(x \in (0,\infty))$. 令 $F(x)=\int_0^x f(t)dt$, 试证明

$$F(x)=o(\sqrt{x}) \quad (x \to 0, x \to +\infty)$$

Proof 根据 Cauchy-Schwarz 不等式, 我们有

$$\frac{|F(x)|}{\sqrt{x}} \leq \frac{\int_0^x |f(t)|\ dt}{\sqrt{x}} \leq \frac{\sqrt{\int_0^x |f(t)|^2\ dt} \cdot \sqrt{x}}{\sqrt{x}}=\sqrt{\int_0^x |f(t)|^2\ dt}.$$

根据积分的绝对连续性, 上式在 $x \to 0^+$ 时趋于 0.

因为 $|f|^2 \in L^1$, 所以对于任给的 $\epsilon>0$ 存在 N 使得 $\int_N^\infty |f|^2<\epsilon^2/4$. 对于 $x>N$, 我们有

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{x}}\int_0^x |f(t)|\ dt &= \frac{1}{\sqrt{x}}\int_0^N |f(t)|\ dt+\frac{1}{\sqrt{x}}\int_N^x |f(t)|\ dt \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{x}}\int_0^N |f(t)|\ dt+\frac{1}{\sqrt{x}}\left(\int_N^x |f(t)|^2\ dt\right)^{\frac{1}{2}}(x-N)^{\frac{1}{2}} \\
&< \frac{1}{\sqrt{x}}\int_0^N |f(t)|\ dt+\frac{\epsilon}{2}
\end{aligned}$$

上式第一项在 x 足够大时便小于 $\epsilon/2$, 于是整个式子就小于 ϵ. 这就证明了 $x \to +\infty$ 时的结论.

7. 设 $f(x)$ 是 E 上的正值可测函数, 且 $m(E)<+\infty$. 试求 $f(x)$ 使乘积

$$\left(\int_E f(x)dx\right)\left(\int_E \frac{1}{f(x)}dx\right)$$

达到最小值.

Proof 根据 Cauchy-Schwarz 不等式, 有

$$\left(\int_E f(x)dx\right)\left(\int_E \frac{1}{f(x)}dx\right) \geq \left(\int_E dx\right)^2=m(E)^2$$

等号在 $f(x)=c \cdot \frac{1}{f(x)}$ 时取到, c 为常数. 因此 $f(x)$ 为常数时 $(\int_E f dx)(\int_E \frac{1}{f}dx)$ 有最小值 $m(E)^2$.

8. 试证明对 $x \in \mathbb{R}$ 有

$$4\sin^2 x-x\sin 2x \leq 2x^2.$$

Proof 根据 Cauchy-Schwarz 不等式, 有

$$x\int_0^x \cos^2 t dt \geq \left(\int_0^x \cos t dt\right)^2$$

即

$$x\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x\right) \geq \sin^2 x$$

整理后就成为所求证的不等式.

9. 设 $f\in L^2([0,1])$, 试证明存在 $[0,1]$ 上的递增函数 $g(x)$, 使得对于任意的 $[a,b]\subset[0,1]$, 有

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right|^2\le(g(b)-g(a))(b-a).$$

Proof 作 $g(x)=\int_0^x|f(t)|^2dt$, 因为 $f\in L^2([0,1]$ 所以 $g(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调上升且处处存在. 根据 Cauchy-Schwarz 不等式知 $g(x)$ 是符合要求的.

10. 设 $f\in L^2([0,1])$ 且 $\|f\|_2\ne 0$. 令

$$F(x)=\int_0^x f(t)dt,\quad x\in[0,1],$$

试证明 $\|F\|_2<\|f\|_2$.

Proof

$$\begin{aligned}
\|F\|_2 &= \left(\int_0^1\left(\int_0^x f(t)dt\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\\
\text{(Cauchy-Schwarz 不等式)}\quad &\le \left(\int_0^1 x\left(\int_0^x|f(t)|^2dt\right)dx\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\le \left(\int_0^1 x\left(\int_0^1|f(t)|^2dt\right)dx\right)^{\frac{1}{2}}\\
&= \|f\|_2\left(\int_0^1 xdx\right)^{\frac{1}{2}}\\
&< \|f\|_2
\end{aligned}$$

11. 设 $\{f_n\}\in L^2([0,1])$ 且 $\{f_n\}$ 在 $[0,1]$ 上依测度收敛于 0. 若有 $\|f_n\|_2\le 1(n=1,2,\dots)$, 试证明

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1|f_n(x)|dx=0.$$

Proof 对于任给的 $\delta>0$, 记 $E_n=E[|f_n|>\delta]$. 则 $m(E_n)\to 0$.

$$\int_0^1|f_n|dx=\int_{[0,1]\setminus E_n}|f_n|dx+\int_{E_n}|f_n|dx$$

对于第一个积分, 它自然小于 δ; 对于第 2 个积分, 根据 Cauchy-Schwarz 不等式和 $\|f\|_2\le 1$ 不难证明第 2 个积分的值 $\le\sqrt{m(E_n)}\to 0$. 所以

$$\limsup_{n\to\infty}\int_0^1|f_n(x)|dx\le\delta.$$

那么根据 δ 的任意性, 就知

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1|f_n(x)|dx=0.$$

12. 设 $2\le p\le\infty$, $f_i\in L^p(E)(i=1,2\dots,k)$, 则

$$\left\|\left(\sum_{i=1}^k|f_i|\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_p\le\left(\sum_{i=1}^k\|f_i\|_p^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Proof 本题有错. 特别的, 取 $k=1, p=2, f_1(x)=\frac{1}{4}, E=[0,1]$. 则左边 $=\left(\int_0^1 \frac{1}{2}^2 dx\right)^{1/2}=\frac{1}{2}$, 右边 $=\|f_1\|_2=\left(\int_0^1 (\frac{1}{4})^2 dx\right)^{1/2}=\frac{1}{4}$, 显然有左边 $>$ 右边.

本题的两个修改办法是: 加上 $f_i(x)\geq 1$ 的条件; 或者把所求证的不等式右边改为 $\left(\sum_{i=1}^k \left\| |f_i|^{\frac{1}{2}} \right\|_p^2\right)^{\frac{1}{2}}$. 我们对第二种修改办法进行证明 (第一种是类似的). 我们把要证明的不等式改写成

$$\left\|\left(\sum_{i=1}^k |f_i|\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_p^2 \leq \sum_{i=1}^k \left\| |f_i|^{\frac{1}{2}} \right\|_p^2.$$

这个只要注意到 $\left\|f^{\frac{1}{2}}\right\|_p^2=\|f\|_{\frac{p}{2}}$ 并应用 Minkowski 不等式即可.

13. 设 $1\leq p\leq\infty$, 若 $f_k\in L^p(E)(k=1,2,\ldots)$, 且级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$$

在 E 上几乎处处收敛, 则

$$\left\|\sum_{k=1}^{\infty} f_k\right\|_p \leq \sum_{k=1}^{\infty}\|f_k\|_p.$$

Proof 因为 $|\sum f_i(x)|\leq\sum|f_i(x)|$, 所以假设 $f(x)\geq 0$ 没有任何损失. 这样, 根据 Minkowski 不等式可以知道

$$\left\|\sum_{i=1}^n f_i(x)\right\|_p \leq \sum_{i=1}^n \|f_i(x)\|_p$$

两边取极限, 对左边应用 Levi 非负渐升列定理, 就得到了要证的结论.

14. 设 $f\in L^p(E)(p\geq 1)$, $e\in E$ 是可测子集, 则

$$\left\{\int_E |f(x)|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}} \leq \left\{\int_e |f(x)|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}} + \left\{\int_{E\setminus e} |f(x)|^p\right\}^{\frac{1}{p}} dx.$$

Proof

$$\begin{aligned}
\|f\|_p &= \|\chi_e\cdot f+\chi_{E\setminus e}\cdot f\|_p \\
\text{(Minkowski 不等式)} \quad &\leq \|\chi_e\cdot f\|_p+\|\chi_{E\setminus e}\cdot f\|_p \\
&= \left(\int_E |\chi_e\cdot f|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int_E |\chi_{E\setminus e}\cdot f|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\int_E \chi_e|f|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int_E \chi_{E\setminus e}|f|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\int_e |f|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int_{E\setminus e} |f|^p\right)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

§6.2, L^p 空间的结构

(一) $L^p(E)$ 是完备的距离空间, 思考题, page 299

1. 若 $f_k \in L^p(E)(k=1,2,\dots)$, $p \geq 1$ 且满足

$$\|f_{k+1}-f_k\|_p \leq \frac{1}{2^k} \quad (k=1,2,\dots),$$

试证明存在 $f \in L^p(E)$ 使得

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x), \text{ a.e. } x \in E.$$

Proof 对于任给的 $\varepsilon > 0$, 存在 N 使 $2^{-N} < \varepsilon$, 当 $n > m > N$ 时,

$$\|f_n - f_m\|_p \leq \sum_{i=m+1}^{n} \|f_i - f_{i-1}\| \leq \sum_{i=m+1}^{n} \frac{1}{2^{i-1}} \leq \frac{1}{2^{m-1}} < \varepsilon$$

所以 $\{f_k\}$ 是 $L^p(E)$ 中的 Cauchy 列, 根据 $L^p(E)$ 的完备性, 它几乎处处收敛于一个 $f \in L^p(E)$.

2. $\{f_k(x)\}$ 是 E 上的可测函数列, $F \in L^p(E)(p \geq 1)$. 若有

$$|f_k(x)| \leq F(x) \quad (k=1,2,\dots),$$

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x), \text{ a.e. } x \in E$$

试证明 $\|f_k - f\|_p \to 0 (k \to \infty)$.

Proof 令 $g_n = |f_n - f|^p, (n=1,2,\dots)$, 则 g_n 可测且 $g_n \to 0$. 又

$$g_n \leq (|f_n| + |f|)^p \leq 2^p F^p \text{ a.e. } x \in E$$

而 $2^p F^p \in L^1(E)$, 所以根据 Lebesgue 控制收敛定理,

$$\lim_{n\to\infty} \int_E g_n dx = 0$$

因此 $\|f_k - f\|_p \to 0$.

注: 本题是 L^p 控制收敛定理, 当 $\{f_k\}$ 依测度收敛于 f 时也是对的.

3. 设 $1 \leq p \leq \infty$, $1/p + 1/p' = 1$, $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^{p'}(\mathbb{R}^n)$, 且令

$$F(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-t)g(t)dt, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

试证明 $F \in C(\mathbb{R}^n)$.

Proof $p < \infty$ 时,

$$\begin{aligned} |F(x+h)-F(x)| &= \int_{\mathbb{R}^n} |f(x+h-t) - f(x-t)||g(t)|dt \\ \text{(Hölder 不等式)} &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x+h-t)-f(x-t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |g(t)|^{p'} dt\right)^{\frac{1}{p'}} \\ &= \|g\|_{p'} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(y+t)-f(y)|^p dy\right)^{\frac{1}{p}} \to 0 \quad (h \to 0) \end{aligned}$$

最后一步根据定理 6.9(p.302). 因此 F 连续.

当 $p = \infty$ 时, $p' = 1$. 设 $|f(x)| \leq M$ a.e.

$$|F(x+h)-F(x)| = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x+h-t)-f(x-t)||g(t)|dt$$

被积函数在 $h \to 0$ 时趋于 0, 且被积函数被 $2M|g(t)| \in L^1(E)$ 控制, 所以根据 Lebesgue 控制收敛定理, $h \to 0$ 时, $|F(x+h)-F(x)| \to 0$, F 连续.

4. 设 $f_n \in L^2(E)(n=1,2,\dots)$, 且有 $\|f_n\|_2 \le M(n=1,2,\dots)$, 若 $\{f_n(x)\}$ 在 E 上几乎处处收敛到 $f(x)$, 试问有 $\|f_n - f\|_2 \to 0(n\to\infty)$ 吗?

Solution 不一定. 取 $E=[0,1]$. 作

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2, & x \in [0, \frac{1}{n^2}]; \\ 0, & x \in (\frac{1}{n^2}, 1]. \end{cases}$$

显然 $f_n(x) \to f = 0$ a.e. $x \in [0,1]$ 和 $\|f_n\|_2 = 1$, 这不满足 $\|f_n(x) - f\|_2 \to 0$.

5. 试证明在 $L^p([0,1])$ 的各等价类中,

(a) 每个类中之多含有一个连续函数,

(b) 存在不含连续函数的类.

Proof (a) 如果存在连续函数 f, g 且 $f = g$ a.e. . 设 $h = f - g$, 则 $f = 0$, a.e. 且 h 连续. 如果存在某个点 x_0 使 $h(x_0) > 0$ 则 (根据连续性) 存在 x_0 的一个临域 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$, h 在上面都不为 0. 这就和 h 几乎处处为 0 矛盾, 因此 $f = 0$ 处处成立. 所以 $f = g$, 它们是同一个函数.

(b) 对于一个类, 含有 sgn $(x - \frac{1}{2})$, 则这个类中不可能有连续函数. 参见 p.132 思考题 9 的证明.

6. 设 $1 \le q \le p < \infty$, $m(E) < \infty$. 若有

$$\lim_{k\to\infty} \int_E |f_k(x) - f(x)|^p dx = 0,$$

试证明

$$\lim_{k\to\infty} \int_E |f_k(x) - f(x)|^q dx = 0,$$

Proof $\dfrac{1}{\frac{p}{q}} + \dfrac{1}{\frac{p}{p-q}} = 1$, 由 Hölder 不等式得

$$\begin{aligned} \int_E |f_k(x) - f(x)|^q dx &= \left(\int_E |f_k(x) - f(x)|^{q\cdot\frac{p}{q}} dx\right)^{\frac{q}{p}} \cdot \left(\int_E 1^{\frac{p}{p-q}} dx\right)^{\frac{p-q}{p}} \\ &= \left(\int_E |f_k(x) - f(x)|^p dx\right)^{\frac{q}{p}} \cdot (m(E))^{\frac{p-q}{p}} \to 0 \end{aligned}$$

7. 设 $f \in L^p([a,b])$, $f_k \in L^p([a,b])(k=1,2,\dots)$. 若有

$$\lim_{k\to\infty} \|f_k - f\|_p = 0,$$

试证明

$$\lim_{k\to\infty} \int_a^x f_k(t)dt = \int_a^x f(t)dt, \quad a \le x \le b.$$

Proof

$$\begin{aligned} \left|\int_a^x f_k(t)dt - \int_a^x f(t)dt\right| &\le \int_a^b |f_k(t) - f(t)|dt \\ \text{(Hölder 不等式)} &\le \|f_k - f\|_p \cdot (b-a)^{\frac{p-1}{p}} \to 0 \quad (k\to\infty) \end{aligned}$$

8. 设 $f \in L^p(E)$, $f_k \in L^p(E)(k=1,2,\dots)$; $g \in L^q(E)$, $g_k \in L^q(E)(k=1,2,\dots)$, 且有 $p > 1$, $1/p + 1/q = 1$. 若有

$$\|f_k - f\|_p \to 0, \quad \|g_k - g\|_q \to 0, \quad (k\to\infty),$$

试证明

$$\lim_{k\to\infty} \int_E |f_k(x)g_k(x) - f(x)g(x)|dx = 0.$$

Proof 对于 $\epsilon = 1$, 存在 K 当 $k > K$ 时 $\|f_k - f\|_p < 1$, 所以 $\|f_k\|_p \le \|f_k - f\|_p + \|f\|_p < 1 + \|f\|_p$ 对于 $k > K$ 都成立. 由此知 $\{\|f_k\|_p\}$ 有界, 设为 $\|f_k\|_p \le M$.

$$
\begin{aligned}
&\int_E |f_k(x)g_k(x) - f(x)g(x)|dx \\
&= \int_E |f_k(x)g_k(x) - f_k(x)g(x) + f_k(x)g(x) - f(x)g(x)|dx \\
&\le \int_E |f_k(x)||g_k(x) - g(x)|dx + \int_E |f_k(x) - f(x)||g(x)|dx \\
&\le \|f_k\|_p \|g_k - g\|_q + \|f_k - f\|_p \|g\|_q \quad \text{(Hölder 不等式)} \\
&\le M\|g_k - g\|q + \|f_k - f\|_p \|g\|_q \to 0 \quad (k \to \infty)
\end{aligned}
$$

(二) $L^p(E)(1 \le p < \infty)$ 是可分空间, 思考题, page 304

1. 设 $1 < p < \infty$, $f_n \in L^p(\mathbb{R})$, $\|f_n\|_p \le M(n = 1, 2, \dots)$, $f \in L^p(\mathbb{R})$, 且有

$$
\lim_{n\to\infty} \int_0^x f_n(t)dt = \int_0^x f(t)dt, \quad x \in \mathbb{R},
$$

则对任意的 $g \in L^q(\mathbb{R})$, $1/p + 1/q = 1$, 有

$$
\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x)g(x)dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)dx.
$$

Proof 从已知看出, 对任何区间 $(a, b]$ 都有 $\int_a^b f_n(x)dx \to \int_a^b f(x)dx$. 于是在一个有限区间 $[a, b]$ 上, 当 $g(x)$ 是阶梯函数时, 结论成立. 因为在有限区间上 g 可以用 $L^q([a, b])$ 上的阶梯函数 L^q 逼近, 容易得到结论对一般的 g 在一个有限区间上也成立, 即有

$$
\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)g(x)dx = \int_a^b f(x)g(x)dx
$$

对任意的区间 $[a, b]$ 成立.

记 $M' = M + \|f\|_p$. 对于任给的 $\varepsilon > 0$, 因为 $|g| \in L^q(\mathbb{R})$, 所以存在 $A > 0$ 使得

$$
\int_A^{+\infty} |g| + \int_{-\infty}^{-A} |g| < \frac{\varepsilon^q}{(M')^q}.
$$

于是

$$
\begin{aligned}
& \int_A^{+\infty} |f_n - f||g| + \int_{-\infty}^{-A} |f_n - f||g| \\
\le\ & \left(\int_A^{+\infty} |f_n - f|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_A^{+\infty} |g|^q\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\int_{-\infty}^{-A} |f_n - f|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{-\infty}^{-A} |g|^q\right)^{\frac{1}{q}} \\
<\ & \|f_n - f\|_p \left(\frac{\varepsilon^q}{M'^q}\right)^{\frac{1}{q}} \\
\le\ & M' \cdot \frac{\varepsilon}{M'} = \varepsilon
\end{aligned}
$$

在 $[-A, A]$ 上, n 充分大之后, 便有 $\int_{-A}^A (f_n - f)g < \varepsilon$,

$$
\begin{aligned}
\left|\int_{\mathbb{R}} f_n g - \int_{\mathbb{R}} fg\right| &= \left|\int_{-A}^A (f_n - f)g + \int_{\mathbb{R}\setminus[-A,A]} (f_n - f)g\right| \\
&\le \left|\int_{-A}^A (f_n - f)g\right| + \int_{\mathbb{R}\setminus[-A,A]} |f_n - f||g| \\
&< \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon
\end{aligned}
$$

这说明 $\int_{\mathbb{R}} f_n g \to \int_{\mathbb{R}} fg$.

2. $L^\infty((0,1))$ 是不可分的.

Proof 设 $\varphi_t = \chi_{(0,t)}$. 则 $F=\{\varphi_t : 0<t<1\}$ 是不可数集. 设 Γ 在 $L^\infty((0,1))$ 中稠密, 取 $\varepsilon=\frac{1}{2}$. 则对于任意的 $\varphi_t\in F$ 都存在 $f_t\in\Gamma$ 使 $\|\varphi_t-f_t\|_\infty<\varepsilon$. 那么 $\|f_{t_1}-f_{t_2}\|_\infty \ge \|\varphi_{t_1}-\varphi_{t_2}\|_\infty - \|\varphi_{t_1}-f_{t_1}\|_\infty - \|\varphi_{t_2}-f_{t_2}\|_\infty > 1-2\varepsilon>0 (t\neq s)$ 所以 f_{t_1} 与 f_{t_2} 不同, Γ 不可数. 这表明 $L^\infty((0,1))$ 上不存在可数的稠密子集.

§6.3, L^2 空间

(一) 内积, 正交系, 思考题, page 306

1. 设 $f,g\in L^2(E)$ 则有 (平行四边形公式)

$$\|f+g\|^2+\|f-g\|^2 = 2(\|f\|^2+\|g\|^2).$$

Proof

$$\begin{aligned}
\|f+g\|^2+\|f-g\|^2 &= \langle f+g,f+g\rangle+\langle f-g,f-g\rangle\\
&= (\langle f,f\rangle+2\langle f,g\rangle+\langle g,g\rangle)+(\langle f,f\rangle-2\langle f,g\rangle+\langle g,g\rangle)\\
&= 2(\langle f,f\rangle+\langle g,g\rangle)\\
&= 2(\|f\|^2+\|g\|^2).
\end{aligned}$$

2. 设 $\|f_n-f\|_2\to 0$, $\|g_n-g\|_2\to 0 (n\to\infty)$, 则

$$|\langle f_n,g_n\rangle-\langle f,g\rangle| = 0 \quad (n\to\infty).$$

Proof 按照 p.299 思考题第 8 题, $\{\|f_n\|\}$ 有界, 设为 M.

$$\begin{aligned}
|\langle f_n,g_n\rangle-\langle f,g\rangle| &= |\langle f_n,g_n\rangle-\langle f_n,g\rangle+\langle f_n,g\rangle\langle f,g\rangle|\\
&= |\langle f_n,g_n-g\rangle+\langle f_n-f,g\rangle|\\
&\le |\langle f_n,g_n-g\rangle|+|\langle f_n-f,g\rangle|\\
&\le \|f_n\|_2\|g_n-g\|_2+\|f_n-f\|_2\|g\|_2 \quad (\text{Schwartz 不等式})\\
&\le M\|g_n-g\|_2+\|f_n-f\|_2\|g\|_2\to 0 \quad (n\to\infty)
\end{aligned}$$

3. 设 $\|f\|_2=\|g\|_2$ 则 $\langle f+g,f-g\rangle=0$.

Proof $\langle f+g,f-g\rangle=\langle f,f\rangle-\langle f,g\rangle+\langle g,f\rangle-\langle g,g\rangle=\langle f,f\rangle-\langle g,g\rangle=\|f\|^2-\|g\|^2=0$.

4. 设 $\|f_n\|_2\to\|f\|_2$, $\langle f_n,f\rangle\to\|f\|_2^2 (n\to\infty)$, 则

$$\|f_n-f\|_2\to 0 \quad (n\to\infty).$$

Proof $\langle f_n-f,f_n-f\rangle=\langle f_n,f_n\rangle-2\langle f_n,f\rangle+\langle f,f\rangle=\|f_n\|^2+\|f\|^2-2\langle f_n,f\rangle\to 0$, $n\to\infty$. 此即 $\|f_n-f\|_2^2\to 0$, 所以 $\|f_n-f\|_2\to 0$.

(二) 广义 Fourier 系数, 思考题, page 314

1. $\{\sin nx\}$ 是 $L^2([0,\pi])$ 中的完全正交系.

Proof 设有 $f\in L^2([0,\pi])$ 与所有的 $\sin nx$ 正交. 我们作 $[-\pi,\pi]$ 上的奇函数 $g(x)$ 使 $g(x)=f(x), x\in(0,\pi]$. 因为 $g(x)$ 是奇函数而 $\cos nx$ 都是偶函数, 所以 $g(x)$ 与 $\cos nx$ 正交. 又 $g(x)$ 与 $\sin nx$ 正交, 所以 $g(x)$ 与 $[-\pi,\pi]$ 上的三角函数系 (完备的) 都正交, $g(x)=0$ a.e. . 这说明 $\{\sin nx\}$ 是 $L^2([0,\pi])$ 中的完全正交系.

2. 设 $f\in L^1([-\pi,\pi])$, $\{\varphi_n(x)\}$ 是 $(-\pi,\pi]$ 的三角函数系. 若有

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\varphi_n(x)dx=0 \quad (n=1,2,\dots),$$

则 $f(x)=0$, a.e. $x\in[-\pi,\pi]$.

3. 设 $\{\varphi_i(x)\}$ 是 $L^2(A)$ 上的完全标准正交系, $\{\psi_k(x)\}$ 是 $L^2(B)$ 中的完全标准正交系, 则

$$\{f_{i,k}(x,y)\} = \{\varphi_i(x)\cdot\psi_k(y)\}$$

是 $L^2(A\times B)$ 上的完全系.

4. 设 $\{\varphi_k(x)\}$ 是 $L^2(E)$ 中标准正交系. 若 $f\in L^2(E)$, 则

$$\lim_{k\to\infty}\int_E f(x)\varphi_k(x)dx = 0.$$

Proof $\int_E f(x)\varphi_k(x)dx$ 就是 Fourier 系数 c_k. 根据 Bessel 不等式 (定理 6.13), $\sum c_k^2 \le \|f\|_2^2$, 说明级数 $\sum c_k^2$ 收敛, 因此 $c_k^2\to 0$, 所以 $c_k\to 0$, 当 $k\to\infty$ 时.

5. 设 $\{\varphi_k\}\subset L^2([a,b])$ 是完全标准正交系, $f\in L^2([a,b])$, $f(x)\sim\sum\limits_{k=1}^{n} c_k\varphi_k(x)$, 其中 $c_k=\langle f,\varphi_k\rangle$, 则对 $[a,b]$ 中的可测集 E 有

$$\int_E f(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty} c_k\int_E \varphi_k(x)dx.$$

Proof 因为 E 可测所以 $\chi_E\in L^2([a,b])$.

$$\langle\chi_E, f\rangle = \int_{[a,b]}\chi_E(x)f(x)dx = \int_E f(x)dx.$$

另一方面, 根据习题六第一组题 15, 有

$$\langle\chi_E, f\rangle = \sum_{k=1}^{\infty}\langle f,\varphi_k\rangle\langle\chi_E,\varphi_k\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} c_k\int_a^b \chi_E(x)\varphi_k(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty} c_k\int_E\varphi_k(x)dx.$$

结合这两个式子, 结论成立.

注: 本题指明了 $f(x)$ 的广义 Fourier 级数可以逐项积分.

§6.5, 卷积, 思考题, p.325

1. 设 $E\subset\mathbb{R}$ 且 $m(E)>0$. 若有

$$(x+y)/2\in E \quad (x,y\in E)$$

则 E 含有一非空开集.

Proof 我们证明 $E+E$ 含有一个开区间. 考虑卷积 $f=\chi_E*\chi_E$, 则 f 是连续的, 故 $G=\{f>0\}$ 是开集. 我们证明 $G\subseteq E+E$. 设 $x\in G$, 若 $x\notin E+E$, 则 $E\cap(x-E)=\emptyset$, 于是 $\chi_E(t)\chi_E(x-t)=0$ 对于所有 t 都成立, 则 $f(x)=(\chi_E*\chi_E)(x)=0$, 与 $x\in G$ 矛盾. 因此 $E+E$ 含有一个开区间. 题设表明 $E+E\subseteq 2E$, 故 $2E$ 也含有一个开区间, 所以 E 含有一个开区间.

2. 设 $f\in L^p(0,\infty)$, $p>1$, 且 $f(x)$ 在 $(0,\infty)$ 上非负递减, 则 $f_\varepsilon(x)=\varepsilon^{-1}f(x/\varepsilon)(\varepsilon>0)$ 有

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{+\infty} f_\varepsilon^{p'}(x)dx = 0, \quad \frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1,\ a>0.$$

(题目疑有误. 例如取 $f(x)=x^{-2/p}$ $(x\ge 1)$, 则 $f\in L^4$ 但 $f\notin L^{4/3}$.)

习题六, page 276
第一组

1. 设 $f\in L^\infty(E), w(x)>0$ 且 $\int_E w(x)dx=1$. 试证明

$$\lim_{p\to\infty}\left(\int_E |f(x)|^p w(x)dx\right)^{1/p} = \|f\|_\infty.$$

Proof 设 $\|f\|_\infty = M$. 对于任意的 $M' < M$, $A = \{x \in E : |f(x)| > M'\}$ 不是零测度的.

$$\left(\int_E |f(x)|^p w(x)dx\right)^{1/p} \geq M' \left(\int_A w(x)dx\right)^{1/p},$$

因为 $0 < \int_A w(x)dx \leq 1$ 所以 $\left(\int_A w(x)dx\right)^{1/p} \to 1$ 当 $p \to \infty$ 时. 这样就得到

$$\liminf_{k\to\infty} \left(\int_E |f(x)|^p w(x)dx\right)^{1/p} \geq M'.$$

因为 M' 可以任意的靠近 M, 所以

$$\liminf_{k\to\infty} \left(\int_E |f(x)|^p w(x)dx\right)^{1/p} \geq M.$$

另一方面,

$$\limsup_{k\to\infty} \left(\int_E |f(x)|^p w(x)dx\right)^{1/p} \leq M.$$

因此

$$\lim_{k\to\infty} \left(\int_E |f(x)|^p w(x)dx\right)^{1/p} = M.$$

2. 设 $g(x)$ 是 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上的可测函数, 若对任意的 $f \in L^2(E)$, 有 $\|g \cdot f\|_2 \leq M\|f\|_2$, 试证明 $|g(x)| \leq M$, a.e. $x \in E$.

Proof $m(E) = 0$ 时是显然的.

如果 $M = 0$, 则 $g \cdot f$ 几乎处处为 0, 而 f 是任意的, 所以必有 g 几乎处处为 0. 结论成立. 下面设 $M > 0$ 并记 $A = \{x \in E : |f(x)| > M\}$. 不妨设 $m(A) < \infty$, 否则可以用 $[-n, n] \cap A$ 代替 A.

如果结论不成立, 那么 $m(A) > 0$. 取 $f = \chi_A$, 那么 $\|f\|_2 = \sqrt{m(A)}$, $\|g \cdot f\|_2 > M\sqrt{m(A)}$, 这里不等号是严格的, 因为在 A 上 $|f| > M$ 严格的成立及 A 的测度是正的. 所以已知成为 $M\sqrt{m(A)} < M\sqrt{m(A)}$, 矛盾. 所以 $m(A) = 0$. 结论成立.

3. 设 $f(x)$ 在 $(0, \infty)$ 上正值可积, $1 < r < \infty$, $E \subset (0, \infty)$ 且 $m(E) > 0$. 试证明

$$\left(\frac{1}{m(E)}\int_E f(x)dx\right)^{-1} \leq \left(\frac{1}{m(E)}\int_E \frac{1}{f^r(x)}dx\right)^{1/r}$$

Proof 注意到

$$m(E) = \int_E 1dx = \int_E f^{\frac{r}{r+1}}(x) \cdot \frac{1}{f^{\frac{r}{r+1}}(x)}\, dx$$

注意到共轭指标 $\frac{r+1}{r}$ 和 $r+1$, 应用 Hölder 不等式, 我们得到

$$m(E) \leq \left(\int_E f(x)dx\right)^{\frac{r}{r+1}} \left(\int_E \frac{1}{f^r(x)}dx\right)^{\frac{1}{r+1}}$$

两边 $\frac{r+1}{r}$ 次方, 就有

$$m(E)^{1+\frac{1}{r}} \leq \left(\int_E f(x)dx\right) \left(\int_E \frac{1}{f^r(x)}dx\right)^{\frac{1}{r}}$$

整理就得所求证的不等式.

4. 设 $f \in L^2([0,1])$. 令

$$g(x) = \int_0^1 \frac{f(t)}{|x-t|^{1/2}}dt, \quad 0 < x < 1,$$

试证明

$$\left(\int_0^1 g^2(x)dx\right)^{1/2} \leq 2\sqrt{2}\left(\int_0^1 f^2(x)dx\right)^{1/2}.$$

Proof 注意到

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{|x-t|}} = 2(\sqrt{x}+\sqrt{1-x}) \le 2\sqrt{2}.$$

那么

$$\begin{aligned} g^2(x) &= \left(\int_0^1 \frac{f(t)}{|x-t|^{1/2}}dt\right)^2 \\ &= \left(\int_0^1 \frac{f(t)}{|x-t|^{1/4}} \cdot \frac{1}{|x-t|^{1/4}}dt\right)^2 \\ &\le \left(\int_0^1 \frac{f^2(t)}{|x-t|^{1/2}}dt\right)\left(\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{|x-t|}}\right) \quad (\text{Schwartz 不等式}) \\ &\le 2\sqrt{2}\left(\int_0^1 \frac{f^2(t)}{|x-t|^{1/2}}dt\right) \end{aligned}$$

两边从 0 到 1 积分,

$$\begin{aligned} \left(\int_0^1 g^2(x)dx\right)^{1/2} &\le (2\sqrt{2})^{1/2}\left(\int_0^1\int_0^1 \frac{f^2(t)}{|x-t|^{1/2}}dtdx\right)^{1/2} \\ &= (2\sqrt{2})^{1/2}\left(\int_0^1\int_0^1 \frac{f^2(t)}{|x-t|^{1/2}}dxdt\right)^{1/2} \quad (\text{Fubini 定理}) \\ &= (2\sqrt{2})^{1/2}\left(\int_0^1 f^2(t)\int_0^1 \frac{dx}{|x-t|^{1/2}}dt\right)^{1/2} \\ &\le (2\sqrt{2})^{1/2}(2\sqrt{2})^{1/2}\left(\int_0^1 f^2(t)dt\right)^{1/2} \\ &= 2\sqrt{2}\left(\int_0^1 f^2(t)dt\right)^{1/2} \end{aligned}$$

5. 试证明 $\displaystyle\int_0^\pi (f(x)-\sin x)^2dx \le \frac{4}{9}$ 和 $\displaystyle\int_0^\pi (f(x)-\cos x)^2dx \le \frac{1}{9}$ 不能同时成立.

Proof 如果两个式子都成立, 就是说 $\|f(x)-\sin x\|_2 \le \frac{2}{3}$ 和 $\|f(x)-\cos x\|_2 \le \frac{1}{3}$. 那么 $\|\sin x-\cos x\|_2 < \|f(x)-\sin x\|_2 + \|f(x)-\cos x\|_2 = 1$. 但实际上,

$$\|\sin x-\cos x\|_2 = \left(\int_0^\pi (\sin x-\cos x)^2dx\right)^{1/2} = \sqrt{\pi},$$

这就导出矛盾. 因此那两个式子不能同时成立.

6. 设 $f \in L^p(\mathbb{R})(p>1)$, $1/p+1/p'=1$. 令

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt, \quad x \in \mathbb{R},$$

试证明 $|F(x+h)-F(x)| = o(|h|^{1/p'})$, $h \to 0$.

Proof

$$\begin{aligned} |F(x+h)-F(x)| &= \left|\int_x^{x+h} f(t)dt\right| \\ &\le \int_x^{x+h} |f(t)|dt \\ &\le \left(\int_x^{x+h} |f(t)|^pdt\right)^{1/p} |h|^{1/p'} \quad (\text{Hölder 不等式}) \end{aligned}$$

所以

$$\lim_{h\to 0}\frac{|F(x+h)-F(x)|}{|h|^{1/p'}}=\lim_{h\to 0}\left(\int_x^{x+h}|f(t)|^p dt\right)^{1/p}=0,$$

最后一步是因为 $f\in L^p(\mathbb{R})$ 和积分连续性.

7. 设 $m(E_k)>0(k=1,2,\dots)$, 且 $m(E_k)\to 0(k\to\infty)$,

$$g_k(x)=\chi_{E_k}(x)/m(E_k)^{1/q},\quad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,\ p>1,$$

试证明对 $f\in L^p(\mathbb{R}^n)$ 有

$$\lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n}g_k(x)f(x)dx=0$$

Proof 根据 Hölder 不等式,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n}|g_k(x)f(x)|dx &= \frac{1}{m(E_k)^{1/q}}\int_{\mathbb{R}^n}\chi_{E_k}(x)|f(x)|dx\\ &= \frac{1}{m(E_k)^{1/q}}\int_{E_k}|f(x)|\cdot 1dx\\ &\le \frac{1}{m(E_k)^{1/q}}\left(\int_{E_k}|f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{E_k}1^q dx\right)^{\frac{1}{q}}\\ &= \left(\int_{E_k}|f(x)|^p\right)^{\frac{1}{p}}\end{aligned}$$

估计积分的绝对连续性, $k\to\infty$ 时 $\left(\int_{E_k}|f(x)|^p\right)^{\frac{1}{p}}\to 0$.

8. 设 $f,g\in L^3(E)$, 且有

$$\|f\|_3=\|g\|_3=\int_E f^2(x)g(x)dx=1,$$

试证明 $g(x)=|f(x)|,$ a.e. $x\in E$.

Proof 注意到 3 和 $\frac{3}{2}$ 是共轭指标, 所以根据 Hölder 不等式,

$$1=\int_E f^2(x)g(x)dx\le\left(\int_E f^3(x)dx\right)^{2/3}\left(\int_E g^3(x)dx\right)^{1/3}=1$$

因此 Hölder 不等式中等号成立. 因此存在 $C>0$ 使 $C|f^2|^{\frac{3}{2}}=|g|^3$ 即 $C|f|^3=|g|^3$ 几乎处处成立. 因为 $\|f\|_3=\|g\|_3$ 所以 $C=1$. 那么 $|f|=|g|$ a.e. $x\in E$. 再注意到

$$\int_E f^2(x)(|g(x)|-g(x))dx=\int_E|f^2(x)|g(x)dx-\int_E f^2(x)g(x)dx=\int_E|f(x)|^3dx-1=0$$

而 $f^2(|g|-g)\ge 0$, 所以它几乎处处为 0, 因为 $\|f\|_3=1$ 所以 f 不几乎处处为 0, 因此 $|g(x)|=g(x)$ a.e. $x\in E$.

9. 设 $f_1(y,z),f_2(y,z),f_3(x,y)$ 是 $\mathbb{R}^2$ 上非负可测函数, 且记

$$I_1=\int_{\mathbb{R}^2}f_1^2(y,z)dydz;\ I_2=\int_{\mathbb{R}^2}f_2^2(x,z)dxdz;\ I_3=\int_{\mathbb{R}^2}f_3^2(x,y)dxdy.$$

令 $F(x,y,z)=f_1(y,z)f_2(x,z)f_3(x,y)$, 试证明

$$\int_{\mathbb{R}^3}F(x,y,z)dxdydz\le(I_1I_2I_3)^{1/2}.$$

Proof 反复应用 Cauchy-Schwarz 不等式,

$$\begin{aligned}
\int f_1 f_2 f_3 dxdydz &= \int f_1 \left(\int f_2 f_3 dx \right) dydz \\
&\le \int f_1 \left(\int f_2^2 dx \cdot \int f_3^2 dx \right)^{1/2} dydz \\
&\le \left(\int f_1^2 dydz \right)^{1/2} \left(\int \left(\int f_2^2 dx \cdot \int f_3^2 dx \right) dydz \right)^{1/2} \\
&= \left(\int f_1^2 dydz \right)^{1/2} \left(\int f_2^2 dxdz \cdot \int f_3^2 dxdy \right)^{1/2} \\
&= (I_1 I_2 I_3)^{1/2}.
\end{aligned}$$

因为被积函数均非负, 过程中的积分次序交换之合法性依 Tonelli 定理.

10. 设 $f \in L^p(\mathbb{R})(1 \le p < \infty)$. 令 $f_h(x) = f(x+h)$. 若 $r, s > 0$ 且 $r + s = p$, 试证明

$$\lim_{|h|\to\infty} \|f_h^r \cdot f^s\|_1 = 0.$$

Proof 具有紧支集的可积函数在 L^1 内稠密. 我们作分解 $f = f_1 + f_2$, f_1 具有紧支集, $\|f_2\|_1 < \epsilon$, 并且 f_1, f_2 的支集不相交. 这样, 我们同时有 $f^r = f_1^r + f_2^r$ 成立.

$$f_h^r \cdot f^s = (g_h^r + b_h^r)(g^s + b^s) = g_h^r \cdot g^s + b_h^r \cdot g^s + g_h^r \cdot b^s + b_h^r \cdot b^s.$$

$\|g_h^r \cdot g^s\|_1$ 在 $|h|$ 充分大后必然是 0. 对其余三项应用 Hölder 不等式,

$$\begin{aligned}
\|{f_2}_h^r \cdot f_1^s\|_1 &\le \|f_2\|_1^{\frac{r}{p}} \|f_1\|_1^{\frac{s}{p}} \le \epsilon^{\frac{r}{p}} \|f\|_1^{\frac{s}{p}}. \\
\|{f_1}_h^r \cdot f_2^s\|_1 &\le \|f_1\|_1^{\frac{r}{p}} \|f_2\|_1^{\frac{s}{p}} \le \epsilon^{\frac{s}{p}} \|f\|_1^{\frac{r}{p}}. \\
\|{f_2}_h^r \cdot f_2^s\|_1 &\le \|f_2\|_1^{\frac{r}{p}} \|f_2\|_1^{\frac{s}{p}} \le \epsilon.
\end{aligned}$$

它们可以任意的小. 所以 $\limsup\limits_{|h|\to\infty} \|f_h^r \cdot f^s\|_1$ 也可以任意的小. 这就证明了结论.

11. 设 $f_n \in \mathrm{AC}([0,1])$, 且 $f_n(0) = 0 (n = 1, 2, \ldots)$. 若 $\{f_n'\}$ 是 $L^1((0,1])$ 中 Cauchy 列, 试证明存在 $f \in \mathrm{AC}([0,1])$ 使得 $f_n(x)$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛于 $f(x)$.

Proof 因为 $\{f_n'\}$ 是 L^1-Cauchy 列, 所以存在 $g \in L^1((0,1])$ 使得 $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 |f_n'(x) - g(x)| dx = 0$. 取 $f(x) = \int_0^x g(t)dt$, 则 f 绝对连续. 下面证明 $\{f_n\}$ 一致收敛于 f. 因为 f_n 绝对连续, 所以 $f_n(x) = f_n(0) + \int_0^x f_n'(x)dx = \int_0^x f_n'(x)dx$. 我们有

$$|f_n - f| = \left| \int_0^x f_n'(t)dt - \int_0^x g(t)dt \right| \le \int_0^x |f_n'(t) - g(t)| dt \le \int_0^1 |f_n'(t) - g(t)| dt \to 0,$$

说明这个收敛是一致的.

12. 设在 $E \subset \mathbb{R}$ 上有 $\|f_n - f\|_1 \to 0$, $\|g_n - g\|_1 \to 0$, $n \to \infty$. 若 $f_n \in L^\infty(E)$, $\|f_n\|_\infty \le M$, 试证明

$$\|f_n g_n - fg\|_1 \to 0, \quad n \to \infty.$$

Proof 本题和 p.188 思考题 7 相同.

13. 设 $f_k \in L^p([a,b])(1 \le p \le \infty)$ 且 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_p < \infty$. 试证明存在 $f \in L^p([a,b])$ 使得

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) = f(x), \quad \text{a.e. } x \in [a,b];$

(b) $\sum_{k=1}^{N} f_k(x)$ 依 $L^p([a,b])$ 意义收敛于 $f(x)$.

Proof 对于任意的 $\epsilon > 0$, 存在 N 使 $\sum_{k=N+1}^{\infty} \|f_k\|_p < \epsilon$. 于是对于任意的 $n > m \geq N$,

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} f_k(x) - \sum_{k=1}^{m} f_k(x)\right\|_p = \left\|\sum_{k=m+1}^{n} f_k(x)\right\|_p \leq \sum_{k=m+1}^{n} \|f_k\|_p < \epsilon$$

这说明 $\sum f_k$ 是 $L^p([a,b])$ 上的 Cauchy 列, 因此依 L^p 意义收敛于上面的一个 f.

于是 $\sum f_k$ 也是依测度收敛到 f 的. 如果 $f_k \geq 0$, 那么 $\sum f_k$ 单调上升, 那么 $\sum f_k$ 是几乎处处收敛到 f 的 (参考 p.143 思考题 6). 下面我们考虑一般的 f_k, 令 $g_k = |f_k|$, 则 $\sum \|g_k\|_p = \sum \|f_k\|_p < \infty$ 仍然成立. 根据第一段的讨论, g_k 几乎处处收敛到某一个 g. 这说明 $\sum |f_k|$ 是几乎处处收敛的. 当然, $\sum f_k$ 更是几乎处处收敛的. 而它已有一个子列收敛到 f(因为 $\sum f_k$ 依测度收敛到 f), 因此 $\sum f_k$ 就是几乎处处收敛到 f.

14. 设 $f \in L^p(E)$, $f_k \in L^p(E)$ (k=1,2,...). 若 $\|f_k - f\|_p < 4^{-k/p}(k = 1, 2, \ldots)$, 试证明对任给的 $\delta > 0$, 存在 $E_\delta \subset E$, $m(E_\delta) < \delta$ 使 $f_k(x)$ 在 $E \setminus E_\delta$ 上一致收敛于 $f(x)$.

Proof 考虑 $E_k = \{x \in E : |f_k(x) - f(x)|^p > 2^{-k}\}$. 则 $\int_E |f_k - f|^p dx > 2^{-k} m(E_k)$, 另一方面, $\int_E |f_k - f|^p dx = \|f_k - f\|_p^p < 4^{-k}$, 所以 $m(E_k) < 2^{-k}$. 对于任给的 $\delta > 0$ 总存在 N 使 $2^{-N} < \delta$. 于是令 $E_\delta = \bigcup_{i=N+1}^{\infty} E_i$, 则 $m(E_\delta) \leq \sum_{i=N+1}^{\infty} 2^{-i} = 2^{-N} < \delta$. 对于任给的 $\varepsilon > 0$, 总存在 K 使 $2^{-K/p} < \varepsilon$. 对所有的 $k > K$ 和 $x \notin E_\delta$, $|f_k(x) - f(x)| < 2^{-k/p} < 2^{-K/p} < \varepsilon$, 说明 $\{f_k(x)\}$ 一致收敛到 $f(x)$ 在 $E \setminus E_\delta$ 上.

15. 设 $\{\varphi_k\} \subset L^2(E)$ 是完全标准正交系, 试证明对 $f, g \in L^2(E)$ 有

$$\langle f, g\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, \varphi_k\rangle \langle g, \varphi_k\rangle .$$

Proof 根据定理 6.15, 当 $\{\varphi_k\}$ 完备时, Bessel 不等式 (定理 6.13) 的等号取到 (称之为 Parseval 等式), 即

$$\|f\|_2^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, \varphi_k\rangle|^2.$$

再注意到

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{4}(\|f + g\|_2^2 - \|f - g\|_2^2),$$

所以

$$\begin{aligned}
\langle f, g\rangle &= \frac{1}{4}\left(\sum_{k=1}^{\infty} |\langle f + g, \varphi_k\rangle|^2 - \sum_{k=1}^{\infty} |\langle f - g, \varphi_k\rangle|^2\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(\sum_{k=1}^{\infty} \langle (f + g) + (f - g), \varphi_k\rangle \cdot \langle (f + g) - (f - g), \varphi_k\rangle\right) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, \varphi_k\rangle \langle g, \varphi_k\rangle .
\end{aligned}$$

16. 设 $\{\varphi_n\}$ 是 $L^2([a,b])$ 中的完全标准正交系. 若 $\{\psi_n\}$ 是 $L^2([a,b])$ 中满足

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b (\varphi_n(x) - \psi_n(x))^2 dx < 1$$

的正交系. 试证明 $\{\psi_n\}$ 是 $L^2([a,b])$ 中的完全标准正交系.

Proof 设 $L^2([a,b])$ 中有 f 与 ψ_n 都正交. 所以 $\langle f, \varphi_n\rangle = \langle f, \varphi_n - \psi_n\rangle$. 根据 Schwartz 不等式, $|\langle f, \varphi_n\rangle|^2 \le \|f\|_2\|\varphi_n - \psi_n\|_2$. 两边对 n 求和, 左边根据 Parseval 恒等式 (因为 $\{\varphi_n\}$ 完备) 是 $\|f\|_2^2$, 而右边 $< \|f\|_2^2$, 如果 $\|f\|_2 \neq 0$. 这就发生矛盾. 因此 $\|f\|_2 = 0$ 说明 f 几乎处处为 0. 这意味着 $\{\psi_n\}$ 完备.

17. 设 $\{\varphi_k\} \subset L^2(E)$ 是标准正交系, 且有 $\Phi \in L^2(E)$ 使得 $|\varphi_k| \le |\Phi|$, a.e. $x \in E$. 若 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k\varphi_k(x)$ 几乎处处收敛, 试证明 $a_k \to 0 (k \to \infty)$.

Proof 因为 $\Phi \in L^2(E)$, 根据积分绝对连续性, 对于任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$ 只要 $m(e) < \delta$ 就有 $\int_e \Phi^2 dx < \varepsilon$.

对于这个 δ, 根据 Egorov 定理, 存在 $E_\delta \subset E$ 使 $m(E \setminus E_\delta) < \delta$ 且 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k\varphi_k$ 在 E_δ 上一致收敛. 这说明 $a_k\varphi_k$ 在 E_δ 上一致的趋于 0, $k \to \infty$ 时.

所以 k 充分大后, $|a_k\varphi_k| < \varepsilon'$ 都成立. 因此

$$\left|\int_{E_\delta} a_k^2\varphi_k^2 dx\right| \le \int_{E_\delta} \varepsilon'^2 dx \le \varepsilon'^2 m(E_\delta)$$

所以

$$\lim_{k\to\infty} a_k^2 \int_{E_\delta} \varphi_k^2(x)dx = 0.$$

再结合

$$\int_{E_\delta} \varphi_k^2 dx = \int_E \varphi_k^2 dx - \int_{E\setminus E_\delta} \varphi_k^2 dx \ge 1 - \int_{E\setminus E_\delta} \Phi^2 dx > 1 - \varepsilon.$$

便知 $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$.

第二组

1. 设 $1 < p < \infty$, 令

$$\mathcal{F} = \left\{ f \in L([0,1]) : \int_0^1 |f(x)|dx = 1, \int_0^1 |f(x)|^p dx = 2 \right\},$$

试证明对 $0 < \varepsilon < 1$, 存在 $\delta > 0$, 使得

$$m(\{x \in [0,1] : |f(x)| > \varepsilon\}) \ge \delta, \quad f \in \mathcal{F}$$

Proof 记 $E_f = \{x \in [0,1] : |f(x)| > \varepsilon\}$, 我们有

$$\int_{E_f} |f(x)|dx > 1 - \varepsilon(1 - m(E_f)),$$

更多地, 从 Hölder 不等式,

$$\int_{E_f} |f(x)|dx = \int_{E_f} 1 \cdot f(x)dx \le m(E_f)^{1/q}\|f\|_p \le 2m(E_f)^{1/q},$$

这里 q 是 p 的共轭指标. 所以我们有 $1 - \varepsilon(1 - m(E_f)) < 2m(E_f)^{1/q}$, 就得到 $1 - \varepsilon < 2m(E_f)^{1/q}$, 或者

$$m(E_f) > \left(\frac{1-\varepsilon}{2}\right)^q.$$

把右边取做 δ 即可.

2. 设 p, q, r 是正数, $0 < t < 1/(p+q+r)$. 试证明

$$\int_0^2 \frac{dx}{(x^p|x-1|^q|x-2|^r)^t} < \infty.$$

Proof 设 $s=pt+qt+rt$, 则 $\frac{1}{s/pt}+\frac{1}{s/qt}+\frac{1}{s/rt}=1$

根据推广的 Hölder 不等式, 有

$$\begin{aligned}\int_0^2 \frac{dx}{(x^p|x-1|^q|x-2|^r)^t} &= \int_0^2 \frac{dx}{x^{pt}|x-1|^{qt}|x-2|^{rt}}\\ &\le \left(\int_0^2 \frac{dx}{x^s}\right)^{\frac{pt}{s}}\left(\int_0^2 \frac{dx}{|x-1|^s}\right)^{\frac{qt}{s}}\left(\int_0^2 \frac{dx}{|x-2|^s}\right)^{\frac{rt}{s}}\end{aligned}$$

因为 $s<1$, 所以上面三个积分都是收敛的.

3. 设 $f\in L^\infty(E)$, $m(E)<\infty$, 且 $\|f\|_\infty>0$, 试证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\|f\|_{n+1}^{n+1}}{\|f\|_n^n}=\|f\|_\infty.$$

Proof

$$\|f\|_{n+1}^{n+1}=\int_E |f|^{n+1}dx=\int_E |f|^n|f|dx\le \|f\|_\infty\|f\|_n^n$$

所以

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{\|f\|_{n+1}^{n+1}}{\|f\|_n^n}\le \|f\|_\infty.$$

另一方面, 注意到 $\frac{n+1}{n}$ 和 $(n+1)$ 是共轭指标, 由 Hölder 不等式, 有

$$\|f\|_n^n=\int_E |f|^n\cdot 1dx\le\left(\int_E |f|^{n+1}\right)^{\frac{n}{n+1}}\left(\int_E 1dx\right)^{\frac{1}{n+1}}=\|f\|_{n+1}^n\cdot m(E)^{\frac{1}{n+1}}$$

所以

$$\frac{\|f\|_{n+1}^{n+1}}{\|f\|_n^n}\ge\frac{\|f\|_{n+1}^{n+1}}{\|f\|_{n+1}^n\cdot m(E)^{\frac{1}{n+1}}}=\frac{\|f\|_{n+1}}{m(E)^{\frac{1}{n+1}}},$$

就有

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{\|f\|_{n+1}^{n+1}}{\|f\|_n^n}\ge\lim_{n\to\infty}\frac{\|f\|_{n+1}}{m(E)^{\frac{1}{n+1}}}=\|f\|_\infty.$$

结合这两者就可以得到

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\|f\|_{n+1}^{n+1}}{\|f\|_n^n}=\|f\|_\infty.$$

4. 设 $f(x)$ 定义在 $(-\infty,\infty)$ 上, 且对任意的 $[-A,A](A>0)$ 上绝对连续. 若下列积分均存在, 试证明

$$\int_{-\infty}^{+\infty}xf^2(x)dx\le 2\left(\int_{-\infty}^{+\infty}|xf(x)|^2dx\right)^{1/2}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}|f'(x)|^2dx\right)^{1/2}.$$

Proof. 题目有误. 取 $f(x)=\exp(-\beta(x-n)^2)$, 则

$$\begin{aligned}I_1 &:= \int_{-\infty}^{\infty}xf^2(x)dx=\frac{n}{\sqrt{\beta}}\sqrt{\frac{\pi}{2}},\\ I_2 &:= \int_{-\infty}^{\infty}x^2f^2(x)dx=\left(\frac{n^2}{\sqrt{\beta}}+\frac{1}{4\beta^{3/2}}\right)\sqrt{\frac{\pi}{2}},\\ I_3 &:= \int_{-\infty}^{\infty}(f'(x))^2dx=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\beta}.\end{aligned}$$

那么 $I_1 \le 2\sqrt{I_2 I_3}$ 就等价于

$$\frac{n^2}{\beta} \le 4\left(\frac{n^2}{\sqrt{\beta}} + \frac{1}{4\beta^{3/2}}\right)\beta = 4\left(n^2\sqrt{\beta} + \frac{1}{4\sqrt{\beta}}\right).$$

该式在 n 很大和 β 很小的时候显然不成立.

一种修正是将不等式左边的被积函数改为 $f^2(x)$, 即证明 (假设各个积分都存在)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(x)dx \le 2\left(\int_{-\infty}^{+\infty} |xf(x)|^2 dx\right)^{1/2}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f'(x)|^2 dx\right)^{1/2}.$$

应用 Cauchy-Schwarz 不等式, 只需证明

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(x)dx \le 2\int_{-\infty}^{\infty} |xf(x)f'(x)|dx. \tag{1}$$

首先考虑具有紧支集的 f. 通过分部积分可以得到

$$\int_{-A}^{A} f^2(x)dx = xf^2(x)\Big|_{x=-A}^{A} - 2\int_{-A}^{A} xf(x)f'(x)dx.$$

取充分大的 A 后就得到 (1).

下面考虑一般的 f. 取 ϕ 为一光滑函数满足 $0 \le \phi \le 1$, 且

$$\phi(x) = \begin{cases} 1, & |x| \le 1/2 \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$

定义函数 $\phi_A(x) = \phi(x/A)$ 及 $f_A(x) = f(x)\phi_A(x)$, 那么 f_A 具有紧支集, 且在 $A \to +\infty$ 时处处收敛于 f 且 $f_A \le f$. 据前所证, 我们有

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_A^2(x)dx \le 2\int_{-\infty}^{\infty} |xf_A(x)f_A'(x)|dx \tag{2}$$

我们计算

$$f_A'(x) = f'(x)\phi_A(x) + f(x)\phi_A'(x) = f'(x)\phi_A(x) + \frac{f(x)\phi'(x/A)}{A}$$

故

$$|f_A'(x)| \le |f'(x)| + \frac{|f(x)|\,|\phi'(x/A)|}{A} \le |f'(x)| + \frac{C|f(x)|}{A},$$

其中 C 为常数.

在(2)的左边取 $A \to \infty$, 根据 Lebesgue 控制收敛定理, 得到 $\int_{-\infty}^{\infty} f^2(x)dx$. 对于(2)的右边, 我们有

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} |xf_A(x)f_A'(x)|dx &\le \int_{-\infty}^{\infty} |xf_A(x)f_A'(x)|dx \\
&\le \int_{-\infty}^{\infty} |xf_A(x)f'(x)|dx + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|xf_A(x)f(x)|}{A}dx \\
&\le \int_{-\infty}^{\infty} |xf_A(x)f'(x)|dx + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|xf^2(x)|}{A}dx \\
&\le \int_{-\infty}^{\infty} |xf(x)f'(x)|dx + \frac{1}{A}\left(\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

在 $A \to \infty$ 时, 上式最右边的第二项趋于 0 (两个积分依题设都存在). 这样就从 (2) 得到了 (1). $\square$

5. 设 $f_n \in L^p(\mathbb{R})(1<p<\infty)$ 且 $f_n(x) \geq 0(n=1,2,\dots)$, 则

$$\|f_n - f\|_p \to 0 \quad (n\to\infty)$$

当且仅当

$$\|f_n^p - f^p\|_1 \to 0 \quad (n\to\infty).$$

Proof $\|f_n\|_p \leq \|f_n - f\|_p + \|f\|_p$, 所以 $\{\|f_k\|_p\}$ 有界, 设 M 满足 $\|f_k\|_p \leq M$ 和 $\|f\|_p \leq M$.

当: 对于 $a,b\geq 0$ 和 $p\geq 1$ 我们有 $|a^p - b^p| \geq |a-b|^p$, 所以 $|f_n^p - f^p| \geq |f_n - f|^p$. 由此易得 $\|f_n - f\|_p \leq \|f_n^p - f^p\|_1^{1/p} \to 0$.

仅当: 对于 $a,b\geq 0$ 和 $p\geq 1$ 我们有 $|a^p-b^p| \leq p|a-b|(a^{p-1}+b^{p-1})$, 所以我们得到

$$\begin{aligned}
\|f_n^p - f^p\|_1 &\leq p\||f_n - f|f_n^{p-1}\|_1 + p\||f_n - f|f^{p-1}\|_1 \\
&\leq p\|f_n - f\|_p\|f_n\|_p^{p-1} + p\|f_n - f\|_p\|f\|_p^{p-1} \\
&\leq 2pM^{p-1}\|f_n - f\|_p \to 0.
\end{aligned}$$

6. 设对任意的 $\varepsilon > 0$, $f(x)$ 在 $[\varepsilon, 1]$ 上绝对连续, 且有

$$\int_0^1 x|f'(x)|^p dx < \infty \quad (p>2),$$

试证明存在极限 $\lim_{x\to 0} f(x)$.

Proof 设 p 的共轭指标为 q, 则 $q<2$ 且 $1-\frac{q}{p} = 2-q$, $\frac{2}{q}-1 = 1-\frac{2}{p}$. 因此对于任给的 $\varepsilon>0$, 取 $\delta = \varepsilon^{\frac{1}{1-\frac{2}{p}}}$.
对于任意的 $x', x'' \in (0,\delta)$, 设 $x' < x''$ 则 (应用 Hölder 不等式)

$$\begin{aligned}
|f(x'') - f(x')| &\leq \int_{x'}^{x''} x^{-1/p}x^{1/p}|f'(x)|dx \\
&\leq \left(\int_{x'}^{x''} x^{-q/p}dx\right)^{1/q}\left(\int_{x'}^{x''} x|f'(x)|^p dx\right)^{1/p} \\
&\leq \left(\frac{x''^{1-\frac{q}{p}} - x'^{1-\frac{q}{p}}}{1-\frac{q}{p}}\right)^{1/q}\left(\int_0^1 x|f'(x)|^p dx\right)^{1/p} \\
&\leq Cx''^{\frac{2-q}{q}} = Cx''^{1-\frac{2}{p}} \\
&< C\delta^{1-\frac{2}{p}} = C\varepsilon
\end{aligned}$$

这里 C 是一个与 δ 无关的常数. 根据极限存在的 Cauchy 准则, 我们知道 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 存在.

7. 设 $0<p,q<\infty$, 试证明 $L^p(E)\cdot L^q(E) = L^{pq/(p+q)}(E)$, 其中

$$L^p(E)\cdot L^q(E) = \{f\cdot g : f\in L^p(E), g\in L^q(E)\}.$$

Proof 根据 p.293 思考题 5, 我们有 $L^p(E)\cdot L^q(E) \subset L^{pq/(p+q)}(E)$.

对于 $h \in L^{pq/(p+q)}(E)$, 作 $f = h^{\frac{q}{p+q}}$ 和 $g = h^{\frac{p}{p+q}}$ 则 $h = f\cdot g$, 且 $f\in L^p(E)$ 和 $g \in L^q(E)$. 这说明 $L^{pq/(p+q)}(E) \subset L^p(E)\cdot L^q(E)$.

结合这两点, 我们知道 $L^p(E)\cdot L^q(E) = L^{pq/(p+q)}(E)$.

8. 设 f,g 是 E 上的非负可测函数, $1\leq p,q<\infty$, $1\leq r\leq\infty$, $\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} - 1$. 试证明

$$\int_E f(x)g(x)dx \leq \|f\|_p^{1-p/r}\|g\|_q^{1-q/r}\left(\int_E f^p(x)g^q(x)dx\right)^{1/r}.$$

Proof $r=\infty$ 时就是 Hölder 不等式. 下面设 $r<\infty$. 因为 $q>1$, 所以 $1/r\le 1/p$ 和 $r\ge p$. 类似的也有 $r\ge q$. 那么 $\frac{1}{\frac{pr}{r-p}}+\frac{1}{\frac{qr}{r-q}}+\frac{1}{r}=1$. 根据推广的 Hölder 不等式,

$$\begin{aligned}\int_E f(x)g(x)dx &= \int_E f^{\frac{r-p}{r}}(x)\cdot g^{r-q}qr(x)dx\cdot f^{\frac{p}{r}}(x)g^{\frac{q}{r}}(x)dx\\ &\le \left(\int_E f(x)^p dx\right)^{\frac{r-p}{pr}}\left(\int_E g(x)^q dx\right)^{\frac{r-q}{qr}}\left(\int_E f^p(x)g^p(x)dx\right)^{\frac{1}{r}}\\ &= \|f\|_p^{1-\frac{p}{r}}\|g\|_q^{1-\frac{q}{r}}\left(\int_E f^p(x)g^p(x)dx\right)^{\frac{1}{r}}.\end{aligned}$$

9. 设 $f\in L^p(\mathbb{R}^n)$, $g\in L^q(\mathbb{R}^n)$, $1\le p,q<\infty$, $1/p+1/q-1>0$. 令 $h(x)=\int_{\mathbb{R}^n}f(t)g(x-t)dt$, 试证明

$$\|h\|_r\le\|f\|_p\|g\|_q,\quad \frac{1}{r}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-1.$$

Proof 首先必有 $r\ge 1$. 根据上题的结论, 有

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}_n}|h|^r dt &\le \left(\int_{\mathbb{R}^n}|f(t)g(x-t)|dt\right)^r\\ &\le \left(\|f\|_p^{1-p/r}\|f\|_q^{1-q/r}\left(\int_E|f(t)|^p|g(x-t)|^q dt\right)^{1/r}\right)^r\end{aligned}$$

所以

$$\|h\|_r=\left(\int_{\mathbb{R}_n}|h|^r dt\right)^{1/r}\le\|f\|_p^{1-p/r}\|f\|_q^{1-q/r}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|f(t)|^p|g(x-t)|^q dt\right)^{1/r}$$

因此只要再证明

$$\left(\int_E|f(t)|^p|g(x-t)|^q dt\right)^{1/r}\le\|f\|_p^{p/r}\|g\|_q^{q/r}$$

即

$$\int_{\mathbb{R}^n}|f(t)|^p|g(x-t)|^q dt\le\left(\int_{\mathbb{R}^n}|f(t)|^p dx\right)\left(\int_{\mathbb{R}^n}|g(x-t)|^q dx\right)$$

根据 p.215 定理 4.34, 这是成立的.

10. 设 $E=\{(x,y):0\le|x|\le y\le 1\}$. 若 $f^2\in L^2(E)$, 试证明

$$\liminf_{y\to 0}\int_{-y}^{y}|f(x,y)|dx=0.$$

Proof 记 $F(y)=\int_{-y}^{y}|f(x,y)|^2dx$, 那么 (根据 Fubini 定理)$\int_E|f(x,y)|^2dx=\int_0^1F(y)dy$. 应用 Cauchy 不等式,

$$\int_{-y}^{y}|f(x,y)|dx\le\sqrt{2yF(y)}.$$

我们只要证明 $\liminf\limits_{y\to 0^+}yF(y)=0$ 就够了. 若不然,

$$\liminf_{y\to 0^+}yF(y)=\lim_{y\to 0^+}\inf_{(0,y)}yF(y)=2\varepsilon>0,$$

所以存在 δ 当 $0<y<\delta$ 时, $yF(y)>\varepsilon$. 这样, $F(y)>\varepsilon/y$, 导致 $F(y)$ 不可积, 矛盾. 因此 $\liminf\limits_{y\to 0}yF(y)=0$ 成立.

11. 设 $f_k\in L^p(\mathbb{R})(k=1,2,\ldots,1<p<\infty)$, 且非负. 试证明 $\|f_k-f\|_p\to 0(k\to\infty)$ 当且仅当 $\|f_k^p-f^p\|_1\to 0(k\to\infty)$.

Proof 本题同第 5 题.

12. 设 $0 < p_0 < q_0 < \infty$, 若 $L^{p_0}(E) \subset L^{q_0}(E)$, 试证明对 $0 < p < q$, 有 $L^p(E) \subset L^q(E)$.

Proof 我们只要证明 f 在 E 上总是有界的即可. 用反证法. 记 $E_n = \{x \in E : |f(x)| > n\}$ 则 $m(E_n) > 0$ 且 $m(E_m)$ 单调下降的趋于 0. 所以存在 $\{n_k\}, \{m_k\}$ 使得

$$\frac{1}{(m_k+1)^\alpha} \le m(E_{n_{k-1}} \setminus E_{n_k}) < \frac{1}{m_k^\alpha}, \quad \alpha = \frac{3}{2}\frac{q_0}{q_0 - p_0}$$

作函数

$$g(x) = \begin{cases} m_k^\beta, & x \in E_{n_{k-1}} \setminus E_{n_k} \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}, \quad \beta = \frac{3}{2}\frac{1}{q_0 - p_0}$$

我们有

$$\int_E |g(x)|^{p_0} dx = \sum_{k=1}^\infty \frac{m_k^{p_0\beta}}{m_k^\alpha} = \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{m_k^{\frac{3}{2}}} < \infty$$

说明 $f \in L^{p_0}(E)$. 但是

$$\int_E |g(x)|^{q_0} dx = \sum_{k=1}^\infty \frac{m_k^{q_0\beta}}{m_k^\alpha} = +\infty$$

说明 $f \notin L^{p_0}(E)$. 这与已知矛盾. 因此 E 上的 f 都是有界的.

13. 设 $f \in L^2(\mathbb{R}), g \in L^2(\mathbb{R})$, 令

$$f_h(x) = (f(x+h) - f(x))/h, \quad (h \neq 0).$$

若有

$$\lim_{h\to 0} \int_{\mathbb{R}} |f_h(x) - g(x)|^2 dx = 0,$$

试证明存在常数 c, 使得

$$f(x) = \int_0^x g(t)dt + c, \text{ a.e. } x \in \mathbb{R}.$$

Proof 因为 $f \in L^2(\mathbb{R})$ 和 $g \in L^2(\mathbb{R})$ 所以 f, g 在任意的有限区间上是 (L^1) 可积的. 所以 $\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt$ 几乎处处存在的等于 $f(x)$. 设 $\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_a^{a+h} f(t)dt = f(a)$.
考虑极限

$$\lim_{h\to 0} \int_a^x (f_h(t) - g(t))dt.$$

根据 Schwartz 不等式,

$$\begin{aligned} \int_a^x (f_h(x) - g(t))dt &\le \left(|x-a| \int_a^x (f_h(x) - g(t))^2 dt\right)^{1/2} \\ &\le \sqrt{|x-a|}\left(\int_{\mathbb{R}} |f_h(x) - g(x)|^2 dx\right)^{1/2} \to 0 \quad (h \to 0) \end{aligned}$$

因此

$$\lim_{h\to 0} \int_a^x (f_h(t) - g(t))dt = 0.$$

$$\lim_{h\to 0} \int_a^x f_h(t)dt = \int_a^x g(t)dt.$$

左边就是

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\int_x^{x+h} f(t)dt - \int_a^{a+h} f(t)dt\right),$$

它几乎处处存在的等于 $f(x)-f(a)$. 因此

$$f(x)-f(a)=\int_a^x g(t)dt \text{ a.e. } x\in\mathbb{R}.$$

于是

$$f(x)=\int_0^x g(t)dt+\left(f(a)-\int_0^a g(t)dt\right) \text{ a.e. } x\in\mathbb{R}.$$

14. 设 $f_k\in L^1(E)\cap L^\infty(E)(k=1,2,\dots)$, $f\in L^1(E)$. 若 $\sup\limits_{k\geq 1}\{\|f_k\|_\infty\}<\infty$, 且 $\|f_k-f\|_1\to 0(k\to\infty)$, 试证明

$$\|f_k-f\|_p\to 0\quad (k\to\infty,p>1).$$

Proof 设 $\sup_k\|f_k\|_\infty=M$. 我们先证明 f 几乎处处有界. 若不然, 设 $|f|>M$ 在一个正测集 A 上. 那么, 因为 $|f_k|\leq M$ a.e., 就有 $\int_A|f_k-f|dx\geq\int_A(|f|-M)dx>0$ 与 $\{f_k\}$ 按 $L^1(E)$ 收敛于 f 矛盾. 于是我们有 $|f|\leq M$ 几乎处处成立, 所以 $|f_k-f|\leq 2M$ 也是. 因此,

$$\int_E|f_k-f|^p dx=\int_E|f_k-f|^{p-1}|f_k-f|dx\leq(2M)^{p-1}\int_E|f_k-f|dx\to 0,\quad f\to\infty.$$

15. 设 $\|f_k\|_p\leq M(k=1,2,\dots)$, $2<p<\infty$. 若有

$$\lim_{k\to\infty}\|f_k-f\|_{p/2}=0,$$

试证明

$$\lim_{k\to\infty}\|f_k-f\|_2=0.$$

Proof 把 2 拆成 $2=2\lambda+2(1-\lambda)$ 且使得

$$\frac{2\lambda}{\frac{p}{2}}+\frac{2(1-\lambda)}{p}=1$$

解出 $\lambda=\frac{p}{2}-1>0$. 于是根据 Hölder 不等式,

$$\begin{aligned}\int_E|f_k-f|^2dx &= \int_E|f_k-f|^{2\lambda}\cdot|f_k-f|^{2(1-\lambda)}dx\\ &\leq \left(\int_E|f_k-f|^{\frac{p}{2}}dx\right)^{\frac{4\lambda}{p}}\left(\int_E|f_k-f|^p dx\right)^{\frac{2(1-\lambda)}{p}}\\ &\leq (2M)^{\frac{2(1-\lambda)}{p}}\left(\int_E|f_k-f|^{\frac{p}{2}}dx\right)^{\frac{4\lambda}{p}}\end{aligned}$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\|f_k-f\|_2\leq\lim_{n\to\infty}(2M)^{\frac{1-\lambda}{p}}\|f_k-f\|_{p/2}^{\lambda}=0.$$

16. 设 $f_k(x)\to f(x)(k\to\infty,x\in E)$, $m(E)<\infty$ 且有

$$\int_E|f_k(x)|^r dx\leq M\ (k=1,2,\dots),\quad 0<r<\infty,$$

试证明对 $p:0<p<r$, 有

$$\lim_{k\to\infty}\int_E|f_k(x)-f(x)|^p dx=0.$$

(注意, 对 $m(E)=\infty$ 或 $p=r$ 皆不真)

Proof 根据 Fatou 引理知 $\int_E |f|^r dx \le M$ 亦成立, 从而有 $\int_E |f_k - f|^r dx \le \int_E (|f_k|^2 + |f|^r) dx \le 2M$.
对于任意的 $\epsilon > 0$, 根据 Egorov 定理, 存在 $F \subseteq E$ 满足 $mF < \varepsilon$ 且 f_k 在 $E \setminus F$ 上一致收敛于 f. 因此在 $E \setminus F$ 上则有

$$\lim_{k\to\infty} \int_{E\setminus F} |f_k(x) - f(x)|^p dx = 0.$$

在 F 上则有 (设 $\alpha = r/p > 1$, β 与 α 共轭)

$$\int_F |f_k - f|^p dx \le \left(\int_F |f_k - f|^r dx\right)^{1/\alpha} m(F)^{1/\beta} < (2M)^{1/\alpha} \epsilon^{1/\beta}.$$

从而

$$\limsup_{k\to\infty} \int_E |f_k - f|^p dx = \limsup_{k\to\infty} \int_F |f_k - f|^p dx \le (2M)^{1/\alpha} \epsilon^{1/\beta}$$

对于任意的 $\epsilon > 0$ 成立. 令 $\epsilon \to 0^+$ 便得结论.

17. 设 $1 < p < \infty$, $f \in L^p(E)$, $f_k \in L^p(E)(k = 1, 2, \ldots)$, 且有 $\lim\limits_{k\to\infty} f_k(x) = f(x)$ a.e. $x \in E$, $\lim\limits_{k\to\infty} \|f_k\|_p = \|f\|_p$. 试证明

$$\lim_{k\to\infty} \|f_k - f\|_p = 0.$$

Proof $f_k \to f$ a.e. 说明 $|f_k|^p \to |f|^p$ 和 $|f_k - f| \to 0$ a.e. . 注意到

$$|f_k - f|^p \le 2^p(|f_k|^p + |f|^p),$$

因此

$$g_k(x) := 2^p(|f_k|^p + |f|^p) - |f_k - f|^p \ge 0.$$

当 $k \to \infty$ 时, 有 $g_k(x) \to 2^{p+1}|f|^p$ a.e. . 对 $g_k(x)$ 应用 Fatou 引理,

$$\int_E \liminf_k g_k(x) dx \le \liminf_k \int g_k(x) dx,$$

于是有

$$\begin{aligned} 2^{p+1} \int_E |f|^p &\le \liminf_k 2^p \left(\int_E |f_k|^p + \int_E |f|^p\right) - \limsup_k \int_E |f_k - f|^p \\ &= 2^{p+1} \int_E |f|^p - \limsup_k \int_E |f_k - f|^p. \end{aligned}$$

所以

$$\limsup_{k\to\infty} \int_E |f_k - f|^p dx \le 0.$$

因此

$$\lim_{k\to\infty} \int_E |f_k - f|^p dx = 0.$$

随后结论成立.

18. 设 $1 < p < \infty$, $f_k \in L^p(E)(k = 1, 2, \ldots)$, 且有

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x), \quad \sup_{1\le k<\infty} \|f_k\|_p \le M.$$

试证明对任意的 $g \in L^{p'}(E)$ (p' 是 p 的共轭指标), 有 (弱收敛)

$$\lim_{k\to\infty} \int_E f_k(x) g(x) dx = \int_E f(x) g(x) dx.$$

Proof 根据 Fatou 引理容易知到 $f \in L^p(E)$ 且 $\|f\|_p \le M$. 因此 $\|f_k - f\|_p \le 2M$.

先考虑 $m(E) < \infty$ 的情形. 根据第 16 题 (那里 r 为本题的 p, 那题的 $p = 1$), 我们知道, 如果 $A \subset E$, 则

$$\lim_{k\to\infty} \int_A f_k dx = \int_A f dx.$$

这样, 若 $g(x) = \chi_A(x)$, 那么结论成立, 从而我们知道结论对 E 上的简单函数都是成立的.

对于任意的 $g \in L^{p'}(E)$, 存在可测简单函数列 $\{\varphi_k\}$ (满足 $|\varphi_k| \le |g|$) 处处收敛于 g, 根据 L^p 上的 Lebesgue 控制收敛定理 (p.299 思考题 2), 对于任意的 $\varepsilon > 0$, 存在可测简单函数 φ 使得 $\|\varphi - g\|_{p'} < \varepsilon$. 根据前面的说明, 存在 K, 当 $k > K$ 时

$$\left|\int_E f_k\varphi dx - \int_E f\varphi dx\right| < \varepsilon.$$

于是 $k > K$ 时

$$\begin{aligned}\left|\int_E f_k g dx - \int_E f g dx\right| &\le \|f_n g - f_n\varphi\|_1 + \|f_n\varphi - f\varphi\| + \|f\varphi - fg\|_1 \\ &\le \|f_n\|_p\|g-\varphi\|_{p'} + \varepsilon + \|f\|_p\|\varphi_g\|_{p'} \quad (\text{Hölder 不等式}) \\ &\le \varepsilon(\|f_n\|_p + 1 + \|f\|_p)\end{aligned}$$

从而结论在 E 测度有限时成立.

当 $m(E) = \infty$ 时, 对于任给的 $\varepsilon > 0$, 因为 $|g|^{p'} \in L^1(E)$, 所以存在 n 使得 (参见 p.172 事实 (iv))

$$\int_{E\setminus[-n,n]} |g|^q dx < \varepsilon^{p'}.$$

根据前面所证的, 存在 K 使 $k > K$ 时

$$\left|\int_{E\cap[-n,n]} f_k g dx - \int_{E\cap[-n,n]} f g dx\right| < \varepsilon$$

此时 (应用 Hölder 不等式)

$$\begin{aligned}\left|\int_{E\setminus[-n,n]} f_k g dx - \int_{E\setminus[-n,n]} f g dx\right| &\le \int_{E\setminus[-n,n]} |f_k - f|\cdot|g| dx \\ &\le \|f_k - f\|_p \left(\int_{E\setminus[-n,n]} |g|^{p'} dx\right)^{1/p'} \\ &\le 2M\varepsilon\end{aligned}$$

所以

$$\left|\int_E f_k g dx - \int_E f g dx\right| < (2M+1)\varepsilon$$

这说明结论对 $m(E) = \infty$ 也成立.

19. 设 $0 < r < \infty$, $\{f_k(x)\}$ 在 E 上几乎处处收敛于 $f(x)$, 且 $\|f_k\|_r \le M$. 试证明对 $0 < p < q$, $1/q + p/r = 1$, $g \in L^q(E)$ 有

$$\lim_{k\to\infty} \|f_k g_k - fg\|_p = 0.$$

Proof. 即便将要证的结论改为 $\|f_k g - fg\|_p \to 0$ 后题目仍有误. 设 $E = [0, \infty)$. 取 $r = q = 3$, $p = 2$, $f_n = n^{1/3}\chi_{[n, n+1/n^{2.1})}$ 则 f_n 处处收敛于 $f = 0$, 且 $\|f_n\|_r^r = 1/n^{1.1} \le 1$. 取 $g = \sum_{n\ge1} f_n$, 则 $\|g\|_q^q = \sum_n \|g_n\|_r^r < \infty$, 故 $g \in L^q[0, \infty)$. 但是

$$\|f_n g\|_p^p = \int_n^{n+\frac{1}{n^{2.1}}} n^{\frac{3}{2}p} dx = n^{0.9}$$

在 $n\to\infty$ 时并不趋于 0.

一种修正是将 $g\in L^q(E)$ 加强为 $g\in L^{pq}(E)$. 此外, p 的条件应为 $0<p<r$. 下面我们证明修正过的版本.

首先, 根据 Fatou 引理我们知道 $\|f\|_r\le M$. 于是我们可以不失一般性地假设 $f=0$, 否则以 f_k-f 代替 f_k. 我们首先证明 $g=\chi_A$ 的情形, 这里 $A\subseteq E$ 且 $mA<\infty$. 我们将 f_k 分成 $\{x\in A:|f_k(x)|>T\}$ 和 $\{x\in A:|f_k(x)|\le T\}$ 两部分. 对于第一部分, 根据 Hölder 不等式有

$$\begin{aligned}\int_A|f_k(x)|^p\chi_{\{|f_k(x)|>T\}}dx&\le\left(\int_A|f_k(x)|^rdx\right)^{\frac{p}{r}}\left(\int_A\chi_{\{|f_k(x)|>T\}}dx\right)^{\frac{1}{q}}\\&\le M^p\cdot m(\{x\in A:f_k(x)>T\})^{\frac{1}{q}}\\&\le M^p\cdot\left(\frac{M}{T}\right)^{\frac{r}{q}}\\&=\frac{M^{p+r/q}}{T^{r/q}}.\end{aligned}$$

对于第二部分, 根据 Lebesgue 控制收敛定理 (被常数 T 控制),

$$\lim_{k\to\infty}\int_A|f_k(x)|^p\chi_{\{|f_k(x)|\le T\}}dx=0.$$

结合两个部分就有

$$\limsup_{k\to\infty}\int_A|f_k(x)|^p\le\frac{M^{p+r/q}}{T^{r/q}}.$$

因为 T 是任意的, 所以

$$\limsup_{k\to\infty}\int_A|f_k(x)|^p=0.$$

这就证明了 $g=\chi_A$ 的情形.

于是, 我们就证明了 g 是简单函数的情形. 对于一般的 g, 取简单函数 h 满足 $\|g-h\|_{pq}<\varepsilon$. 那么

$$\|f_kg\|_p\le\|f_kh\|_p+\|f_k(g-h)\|_p.$$

右边第一项在 $k\to\infty$ 时据前所证趋于 0. 右边第二项可以类似上面用 Hölder 不等式控制,

$$\|f_k(g-h)\|_p\le\|f_k\|_r\|g-h\|_{pq}\le M\varepsilon.$$

这就表明

$$\limsup_{k\to\infty}\|f_kg\|_p\le M\varepsilon.$$

根据 ε 的任意性便得

$$\limsup_{k\to\infty}\|f_kg\|_p=0$$

即得结论. □

20. 设 $1\le p<\infty$, $\{f_k(x)\}\subset L_p(E)$, $f\in L_p(E)$, $\{g_k(x)\}$ 是 E 上的一致有界的可测函数列, 且 $g_k(x)\to g(x)(x\in E,k\to\infty)$, 试证明

$$\lim_{k\to\infty}\|f_kg_k-fg\|_p=0.$$

(题设缺 f_k 与 f 的关系)

21. 试说明 Riemann 积分意义下的平方可积的函数类不是完备空间 (其中距离为 $d(f,g)=\|f-g\|_2$).

Solution 考虑 $(0,1)$ 上的有理数 $\{r_n\}$. 作一系列的开区间 I_n 使 $|I_n| < \frac{1}{2^{n+1}}$ 和 $r_n \in I_n$. 令 $E_n = \bigcup_{k=1}^{n} I_k$ 和 $E = \bigcup_{k=1}^{n} I_k$. 我们下面说明 $\{\chi_{E_n}\}$ 是一个在 Riemann 积分意义下的 Cauchy 列.

每一个 χ_{E_k} 的不连续点都是有限个, 所以 Riemann 可积. 对于给出的 $\varepsilon > 0$, 都可以找到 N 使 $2^{-N} \leq \varepsilon$. 对于 $n > m \geq N$, $|\chi_{E_n} - \chi_{E_m}|^2 = \chi_{E_n \setminus E_m}$ 是 Riemann 可积的且

$$\int_0^1 |\chi_{E_n} - \chi_{E_m}|^2 dx = \int_0^1 \chi_{E_n \setminus E_m} dx \leq \sum_{k=m+1}^{n} \int_0^1 \chi_{E_k} dx \leq \frac{1}{2^{m+1}} < \varepsilon.$$

这就说明了 $\{\chi_{E_n}\}$ 是 Cauchy 列.

如果存在 f, 使 $\{\chi_{E_n}\}$ 在 Riemann 积分的平方收敛意义下收敛到 f, 又我们有 $\chi_{E_n} \to \chi_E$(处处收敛), 可以用 Fatou 引理证明, $\int_0^1 |f - \chi_E|^2 dx = 0$.

$m(E) < \sum_{k=1}^{\infty} |E_k| \leq \frac{1}{2}$, 所以 $m((0,1) \setminus E) > 0$. 而 $(0,1) \setminus E$ 的点都是 χ_E 的不连续点, 因此 χ_E 不是 Riemann 可积的. 这就说明 f 不是 Riemann 可积的, 与假设矛盾.

这一矛盾就说明了 Riemann 积分意义下的平方可积的函数类不是完备的.

22. 设 $\{f_n(x)\}$ 是 $L^2([0,1])$ 中的绝对连续函数列, 且 $f_n' \in L^2([0,1])$, 又存在 $f, g \in L^2([0,1])$ 满足

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_2 = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \|f_n' - g\|_2 = 0.$$

试证明 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上的绝对连续函数, 且有

$$f'(x) = g(x), \text{ a.e. } x \in [0,1].$$

Proof 从第一个极限我们知道 $\{f_n\}$ 依测度收敛于 f, 所以存在一个子列 $\{f_{n_j}\}$ 几乎处处收敛于 f, 取其中的一个收敛点 a.

从第二个极限我们知道对于 $[0,1]$ 上的任何一个区间 $[a,x]$ 都有 $\int_a^x |f_n' - g|^2 dt \to 0$, 根据 p.292 例 2, 有 $\int_a^x |f_n' - g| dt \to 0$. 因此 $\int_a^x f_n' \to \int_a^x g$ 都成立.

因为 f_{n_j} 绝对连续, 所以 $f_{n_j}(x) - f_{n_j}(a) = \int_a^x f_{n_j}'$, 两边取极限有 $f(x) - f(a) = \int_a^x g(t)dt$ 几乎处处成立.

23. 设 $1 \leq p \leq \infty$, $f \in L^p(\mathbb{R})$, 记 $f_h = f(x-h)$, 试证明

$$\lim_{h\to 0} \|f + f_h\|_p = 2\|f\|_p.$$

Proof 根据不等式 $|a^p - b^p| \leq p|a-b|(a^{p-1} + b^{p-1})(a, b \geq 0)$ 我们有

$$\int_{\mathbb{R}} (|f + f_h|^p - |2f|^p) \leq p \int_{\mathbb{R}} |f - f_h||f + f_h|^{p-1} + p \int_{\mathbb{R}} |f - f_h||f|^{p-1}$$

由 Hölder 不等式

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} |f - f_h||f + f_h|^{p-1} &\leq \left(\int_{\mathbb{R}} |f - f_h|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f + f_h|^p\right)^{1-\frac{1}{p}} \\
&\leq 2^{1-\frac{1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f - f_h|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f|^p\right)^{1-\frac{1}{p}} \\
\int_{\mathbb{R}} |f - f_h||f|^{p-1} &\leq \left(\int_{\mathbb{R}} |f - f_h|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f|^p\right)^{1-\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

根据定理 6.9(p.302), $\lim_{h\to 0} \int_{\mathbb{R}} |f - f_h|^p dx = 0$. 所求证的结论可以立即导出.

24. 设 $f \in L^1([0,2\pi])$. 若其 Fourier 级数在正测集 $E \subset [0,2\pi)$ 上 (点) 收敛, 试证明其 Fourier 系数必收敛于 0.

Proof 设它的 Fourier 级数是 $a_0 + \sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n \sin nx + b_n \cos nx)$, 它在 E 上收敛, 所以 $a_n \sin nx$ 和 $b_n \cos nx$ 在 E 上都是趋于 0 的. 根据 Egorov 定理, $a_n \sin nx$ 在 E 的某一个子集 A 上一致的收敛于 0, $m(E \setminus A) < \delta$.

$$\int_E a_n \sin^2 nxdx = \int_A a_k \sin^2 nxdx + \int_{E\setminus A} a_n \sin^2 nxdx.$$

因为 $|a_n| \le \|f\|_1$ 对于所有 n 都成立, 我们可以如此的选择 δ 使得第二个积分的绝对值 $< \frac{\varepsilon}{2}$, 固定这个 δ (因此 A 也固定), 那么 k 充分大之后, $|a_n \sin^2 nx| < |a_n \sin nx| < \frac{\varepsilon}{4\pi}$ 都成立, 因此第一个积分的绝对值不超过 $\varepsilon/2$. 所以 n 充分大之后 $\left|\int_E a_n \sin^2 nxdx\right| < \varepsilon$. 这说明

$$\lim_{n\to\infty} \int_E a_n \sin^2 nxdx = 0.$$

但是

$$\int_E \sin^2 nxdx = \int_E \frac{1-\cos 2nx}{2}dx = \frac{1}{2}m(E) - \frac{1}{2}\int_E \cos 2nxdx.$$

第 2 个积分根据 Féjer 定理是趋于 0 的, 所以 $\int_E \sin^2 nxdx$ 并不趋于 0, 于是知 $a_n \to 0$. 类似的可以证明 $b_n \to 0$. 这就是说 Fourier 系数收敛.

25. 设 $\{\varphi_k\} \subset L^2([a,b])$ 是标准正交系, 若存在极限

$$\lim_{k\to\infty} \varphi_k(x) = \varphi(x), \text{ a.e. } x \in [a,b],$$

试证明 $\varphi(x) = 0$, a.e. $x \in [a,b]$.

Proof 容易知道 $f \in L^2([a,b])$. 根据第 18 题, $\int_a^b \varphi_k \cdot f \to \int_a^b \varphi \cdot f$ 对任意的 $f \in L^2([a,b])$ 成立. 根据 Bessel 不等式, 我们知道 $c_k = \int_a^b \varphi_k \cdot f \to 0$ 对任意的 $f \in L^2([a,b])$ 成立. 特别的, 取 $f = \varphi^+$, 有 $\int_a^b \varphi_k\varphi^+ \to \int_a^b \varphi\varphi^+$ 和 $\int_a^b \varphi_k\varphi^+ \to 0$ 都成立. 这意味着 $\int_a^b \varphi\varphi^+ = 0$ 即 $\int_a^b {\varphi^+}^2 = 0$. 所以 $\varphi^+ = 0$ a.e. $x \in [a,b]$. 同样的可以证明 $\varphi^- = 0$ a.e. $x \in [a,b]$. 所以 $\varphi = 0$, a.e. $x \in [a,b]$.

26. 试证明 $\varphi_n(x) = \sin \lambda_n x (n = 1, 2, \dots)$ 是 $L^2([0,1])$ 中的正交系, 其中 λ_n 是 $\tan x = x$ 的正根.

Proof 当 $m \ne n$ 时, $\lambda_m = \tan \lambda_m > 0, \lambda_n = \tan \lambda_n > 0$, 所以 $\sin \lambda_m \ne 0, \cos \lambda_m \ne 0, \sin \lambda_n \ne 0, \cos \lambda_n \ne 0$.

$$\begin{aligned}
\langle \sin \lambda_m x, \sin \lambda_n x \rangle &= \int_0^1 \sin \lambda_m x \sin \lambda_n x \, dx = -\frac{1}{2}\int_0^1 (\cos(\lambda_m + \lambda_n)x - \cos(\lambda_m - \lambda_n)x)dx \\
&= -\frac{1}{2}\left(\frac{\sin(\lambda_m + \lambda_n)}{\lambda_m + \lambda_n} - \frac{\sin(\lambda_m - \lambda_n)}{\lambda_m - \lambda_n}\right) \\
&= -\frac{\lambda_m(\sin(\lambda_m+\lambda_n)-\sin(\lambda_m-\lambda_n)) - \lambda_n(\sin(\lambda_m+\lambda_n)-\sin(\lambda_m-\lambda_n))}{2(\lambda_m^2 - \lambda_n^2)} \\
&= -\frac{\lambda_m \cos \lambda_m \sin \lambda_n - \lambda_n \sin \lambda_m \cos \lambda_n}{\lambda_m^2 - \lambda_n^2} \\
&= -\frac{\lambda_m \tan \lambda_n - \lambda_n \tan \lambda_m}{\cos \lambda_m \cos \lambda_n(\lambda_m^2 - \lambda_n^2)} = 0
\end{aligned}$$

即 $m \ne n$ 时, $\sin \lambda_m x$ 与 $\sin \lambda_n x$ 正交.

27. 设 $\{f_n\} \in L^2([0,1])$ 是标准正交系, 试证明

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\int_0^x f_n(t)dt\right|^2 \le x, \quad x \in [0,1].$$

Proof 取 $f(t)=\chi_{[0,x]}(t)$. 则 f 按 $\{f_n\}$ 的 Fourier 系数 $c_n=\int_0^1 f(t)f_n(t)dt=\int_0^x f_n(t)dt$. 根据 Bessel 不等式 (p.308, 定理 6.13), $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n^2 \le \|f\|_2^2 = x$, 这即为所求证的不等式.

28. 设 $g(x)$ 是 $[a,b]$ 上的非负实值可测函数, 令

$$\Phi=\{\varphi : g\cdot\varphi \in L^1([a,b])\}.$$

试证明 Φ 在 $L^2([a,b])$ 中稠密.

29. 设 $f\in L^2(\mathbb{R}), f_n\in L^2(\mathbb{R})$, 且有 $\|f_n-f\|_2\to 0(n\to\infty)$. 若 $g\in L^1(\mathbb{R})$, 试证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\|f_n*g-f*g\|_2=0$.

Proof

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}}|f_n*g-f*g|^2dx &= \int_{\mathbb{R}}\left|\int_{\mathbb{R}} f_n(x-t)g(t)dt-\int_{\mathbb{R}} f(x-t)g(t)dt\right|^2dx\\
&\le \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}}|f_n(x-t)-f(x-t)||g(t)|^{\frac12}|g(t)|^{\frac12}dt\right)^2dx\\
\text{(Schwartz 不等式)}\quad &\le \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}}|f_n(x-t)-f(x-t)|^2|g(t)|dt\int_{\mathbb{R}}|g(t)|dt\right)dx\\
\text{(Fubini 定理)}\quad &= \|g\|_1\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}|f_n(x-t)-f(x-t)|^2|g(t)|dxdt\\
&= \|g\|_1\int_{\mathbb{R}}|g(t)|\int_{\mathbb{R}}|f_n(x-t)-f(x-t)|^2dxdt\\
&= \|g\|_1^2\|f_n-f\|_2^2
\end{aligned}$$

所以 $\|f_n*g-f*g\|_2\le\|g\|_1\|f_n-f\|_2\to 0$ 当 $n\to\infty$ 时.

30. 设在 $L^2(E)$ 中有 f_k 弱收敛于 f, 试证明

$$\|f_k\|_2\le M\quad(k=1,2,\dots).$$

Proof 反证. 若 $\|f_k\|_2$ 无界, 我们先说明数集 (k 可以任意地取)

$$\{\langle f_k,g\rangle : g\in L^2\}$$

在任意的闭球 $B(g,\delta)$ 上无界. 若不然, 设它在某一个 $B(g_0,\delta_0)$ 上有界, 即存在常数 M, 使得

$$|\langle f_k,g\rangle|\le M,\quad g\in B(g_0,\delta),\quad k=1,2,\dots$$

作 $h=g_0+\delta_0\dfrac{f_k}{\|f_k\|_2}$, 易知 $h\in B(g_0,\delta_0)$, 有 $|\langle f_k,h\rangle|\le M$ 即

$$|\langle f_k,h\rangle|=\left|\langle f_k,g_0\rangle+\frac{\delta_0}{\|f_k\|_2}\langle f_k,f_k\rangle\right|=|\langle f_k,g_0\rangle+\|f_k\|_2\delta_0|\le M$$

于是得到 $\|f_k\|_2\le 2M/\delta_0$. 这样与假设 $\|f_k\|_2$ 无界矛盾. 因此 $\{\langle f_k,g\rangle\}$ 在任意闭球上无界.

取 B_0 为 $L^2(E)$ 中的一个闭球, $\{\langle f_k,g\rangle\}$ 在上面无界. 因此存在 n_1 和 g_1 使 $|\langle f_{n_1},g_1\rangle|>1$. 根据内积的连续性, $F_{n_1}(g)=\langle f_{n_1},g\rangle$ 是关于 g 的连续函数, 因此存在 $\delta_1<1$, 使 $B_1=B(g_1,\delta_1)\subset B_0$ 及 $|\langle f_{n_1},g\rangle|>1$ 对任意的 $g\in B_1$ 成立.

在 B_1 上, $\{\langle f_k,g\rangle\}$ 因此又可以选出 $n_2>n_1$ 和 g_2 使得 $|\langle f_{n_1},g_1\rangle|>2$. 按照前面的讨论, 存在闭球 $B_2=B(g_2,\delta_2)\subset B_1(\delta_2<\frac12)$ 使得 $|\langle f_{n_2},g\rangle|>2$ 对任意的 $g\in B_2$ 成立.

如此进行下去, 存在 f_{n_k} 和 $g_k\in B_{k-1}$, 存在闭球 $B_k=B(g_k,\delta_k)\subset B_{k-1}(\delta_k<\frac1k)$ 使得 $|\langle f_{n_k},g\rangle|>k$ 对任意的 $g\in B_k$ 成立.

如此就得到 $L^2(E)$ 上的点列 $\{g_k\}$. 因为 $B_n\subset B_m(n>m)$ 和 $g_n,g_m\in S_m$ 我们有 $\|g_n-g_m\|_2\le\delta_m\to 0$ 当 $k\to\infty$ 时. 这说明 $\{g_k\}$ 是 $L^2(E)$ 上的 Cauchy 列, 它按 L^2 意义收敛于某个 g. 因为 f_k 弱收敛于 g, 所以 $\langle f_k,g\rangle\to\langle f,g\rangle$. 但事实上, g 属于所有的 B_k, 所以 $|\langle f_k,g\rangle|>k$ 这和 $\{\langle f_k,g\rangle\}$ 收敛矛盾.

由此推翻假定, 我们知道 $\|f_k\|_2$ 一致有界.

31. 设 $f \in L^p(\mathbb{R})(1 \le p < \infty)$, 试证明存在数列 $\{h_n\}$: $h_n \to 0(n \to \infty)$, 使得

$$\lim_{n\to\infty} f(x-h_n) = f(x), \text{ a.e. } x \in \mathbb{R}.$$

Proof 根据定理 6.9, 有

$$\lim_{h\to 0}\int_{\mathbb{R}} |f(x-h)-f(x)|^p dx = 0,$$

那么对于一列 $h_n \to 0$ 有

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} |f(x-h_n)-f(x)|^p dx = 0,$$

这意味着 $f(x-h_n)$ 依测度收敛于 $f(x)$, 所以存在子列 $f(x-h_{n_i})$ 几乎处处收敛于 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上.